

# 5

## Árboles

---

### *Ejercicio 5.1*

---

Dibujar, para cada inserción, el árbol de búsqueda binario resultante de la inserción sucesiva de los elementos:

6 8 7 2 4 1 9 5 0.

### *Solución*

---

La definición de árbol de búsqueda se caracteriza por la discriminación de los valores en base a una condición mutuamente excluyente. En el caso en que los valores sean números no repetidos la condición de orden será mayor o menor que. Por convenio, en el subárbol izquierdo se asignan los valores menores y en el derecho los mayores al valor de la raíz del subárbol.

Así, el 6 se inserta como raíz, seguidamente el 8 se inserta en el hijo derecho de la raíz ya que es mayor que el 6, y a continuación se inserta el 7 a la derecha de la raíz (es mayor que 6) y a la izquierda del 8 ya que es menor que el valor de este nodo. Seguidamente el 2 se inserta en el hijo izquierdo de la raíz ya que es menor que 6. La secuencia de construcción del árbol se muestra en la figura 5.1.

El 4 se inserta a la izquierda del 6 (es menor) y a la derecha del 2 (es mayor), tal y como se muestra en la figura 5.2a. El valor 1 se inserta a la izquierda del 6 al ser menor que este, y a la izquierda del 2 ya que también es menor que el valor de este nodo (véase la figura 5.2b).

El valor 9 se inserta a la derecha del 6 y del 8, al ser mayor que ambos. El árbol queda como se muestra en la figura 5.3.

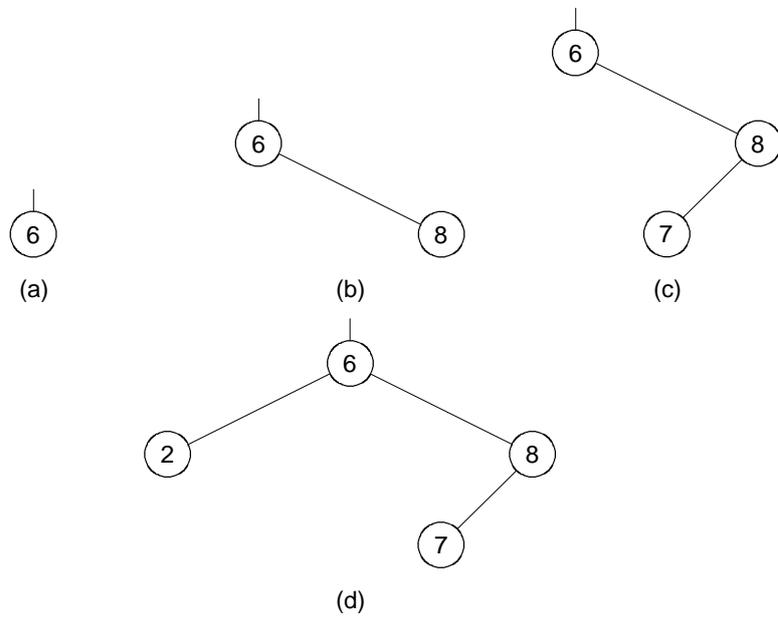


Fig. 5.1 Inserción de los elementos 6, 8, 7 y 2.

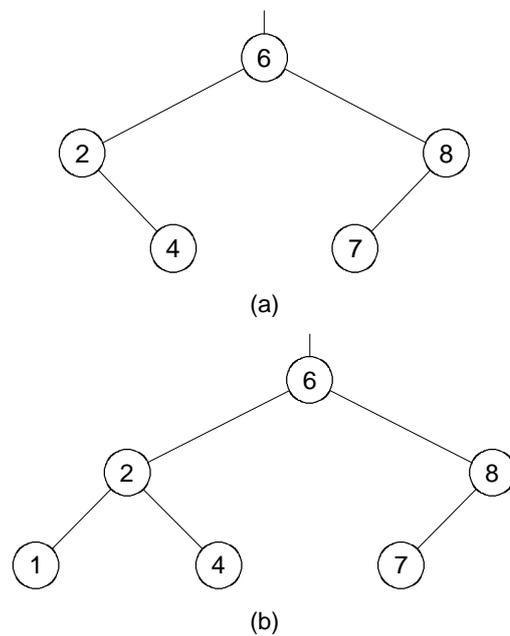


Fig. 5.2 Inserción de los elementos 4 y 1.

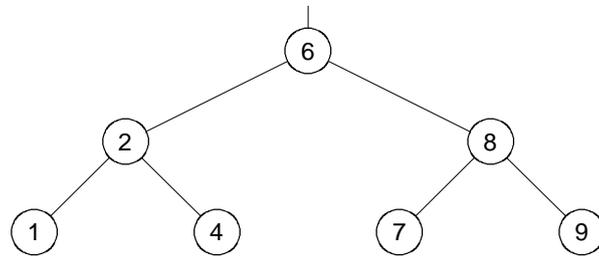


Fig. 5.3 Inserción del elemento 9.

A continuación se inserta el 5 a la derecha del 4, tal y como se puede apreciar en la figura 5.4.

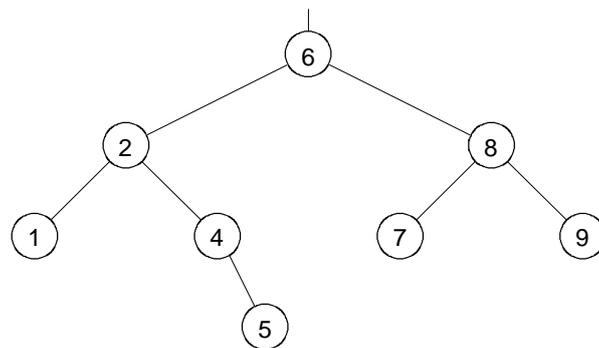


Fig. 5.4 Inserción del elemento 5.

Por último, el 0 se inserta en el hijo izquierdo del 1 (véase la figura 5.5).

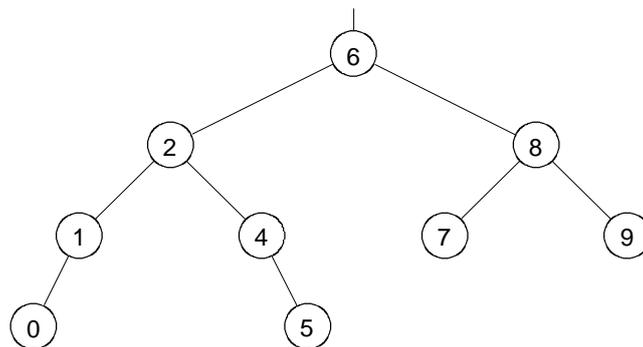


Fig. 5.5 Árbol de búsqueda binario resultante de la inserción sucesiva de los elementos 6 8 7 2 4 1 9 5 0.

*Ejercicio 5.2*

---

Eliminar la raíz del árbol de búsqueda binario resultante de la figura 5.5.

*Solución*

---

Para eliminar un elemento de un árbol de búsqueda binario debe tenerse en cuenta que tras la eliminación debe satisfacerse la condición de árbol de búsqueda. Para ello es necesario que para cada nodo se satisfaga la relación mutuamente excluyente adecuada. En general, será necesario sustituir el valor eliminado por otro valor, dado por uno de los dos siguientes criterios:

- Sustituir por el valor más a la derecha del subárbol izquierdo del nodo eliminado.
- Sustituir por el valor más a la izquierda del subárbol derecho del nodo eliminado.

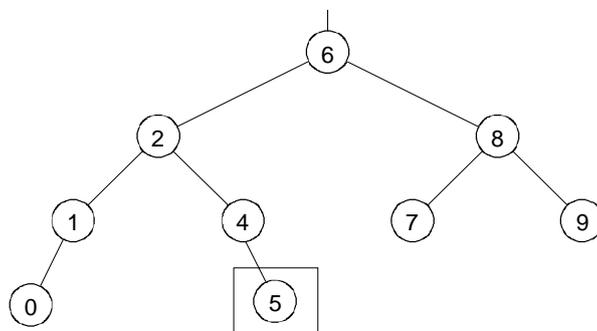
Cualquiera de los dos criterios es válido. Sin embargo, debe tenerse en cuenta que para un mismo árbol, es decir, para una misma implementación del algoritmo de eliminación, debe utilizarse siempre el mismo criterio, tanto por razones de sencillez de código como por coste del algoritmo (no tiene sentido decidir entre uno u otro criterio, ya que son ambos válidos, y es absurdo proponer un uso aleatorio de ambos ya que implica un coste que no aporta nada al algoritmo).

En el caso en que los valores son números los dos criterios son equivalentes a:

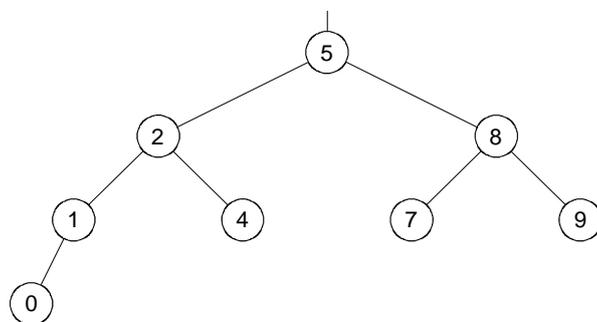
- Sustituir por el valor mayor de los menores al elemento eliminado.
- Sustituir por el valor menor de los mayores al elemento eliminado.

Como es evidente, tras la sustitución será necesario eliminar el nodo (liberar la memoria asociada) que ha reemplazado al eliminado.

Por tanto, la solución resultante con ambos criterios se muestra en las figuras 5.6 (implementación del criterio: Sustituir por el valor mayor de los menores al elemento eliminado) y 5.7 (implementación del criterio: Sustituir por el valor menor de los mayores al elemento eliminado).

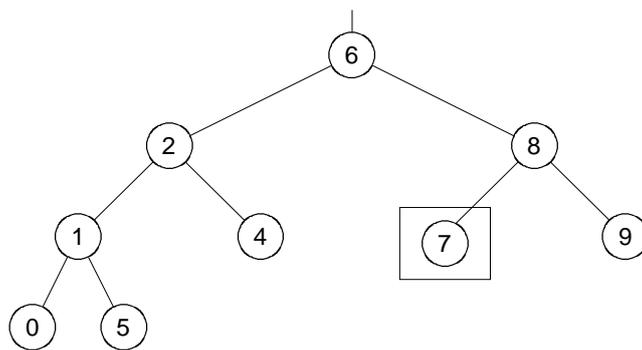


(a)

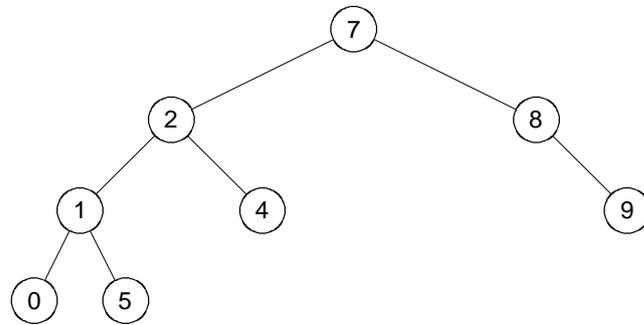


(b)

Fig. 5.6 Eliminación de la raíz con el criterio: Sustituir por el valor mayor de los menores al elemento eliminado.



(a)



(b)

Fig. 5.7 Eliminación de la raíz con el criterio: Sustituir por el valor menor de los mayores al elemento eliminado.

### *Ejercicio 5.3*

Dado el árbol AVL de la figura 5.8, indicar la secuencia de pasos necesaria para insertar el valor 17.

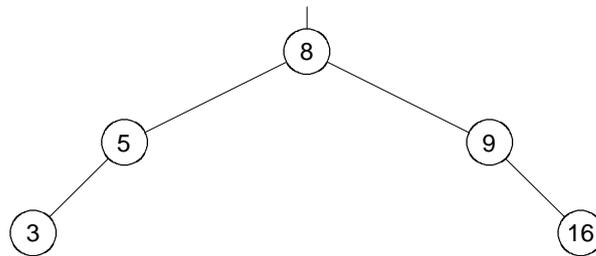


Fig. 5.8 Árbol AVL.

### *Solución*

El árbol AVL debe satisfacer en primer lugar la condición de árbol de búsqueda. Para ello, en primer lugar se insertará a la derecha del 8, del 9 y del 16, al ser mayor que todos ellos (véase la figura 5.9).

La condición de equilibrio no se satisface ya que el nodo de valor 9 tiene altura 2 por la derecha y 0 por la izquierda, es decir, el balance es +2. Por ello es necesario un rebalanceo RR.

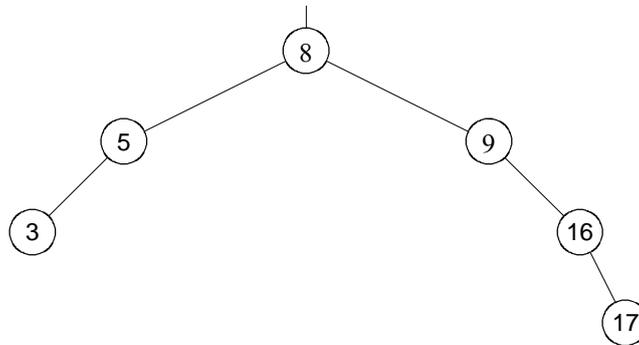


Fig. 5.9 Inserción del elemento 17 en el árbol AVL.

**Rebalanceo RR**

Para realizar el rebalanceo debe considerarse únicamente el subárbol que tiene como raíz el nodo más profundo con balance mayor que 1. En este caso, el subárbol con raíz 9. El detalle del rebalanceo se muestra en la figura 5.10.

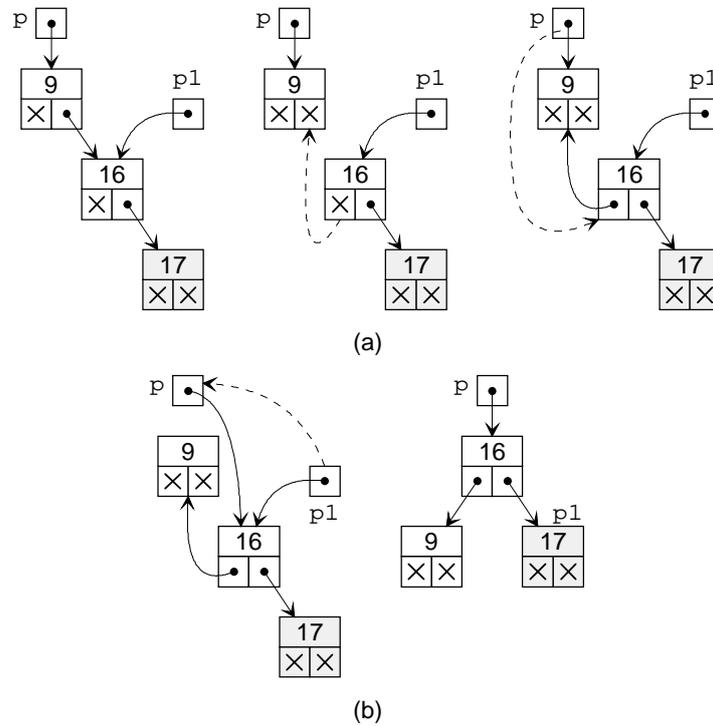


Fig. 5.10 Rebalanceo RR.

Por tanto, el árbol AVL resultante queda como se muestra en la figura 5.11.

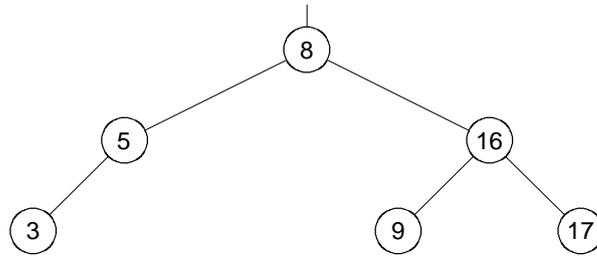


Fig. 5.11 Árbol AVL resultante de la inserción del elemento 17.

### *Ejercicio 5.4*

Dado el árbol AVL de la figura 5.12, indicar la secuencia de pasos necesaria para insertar el valor 6.

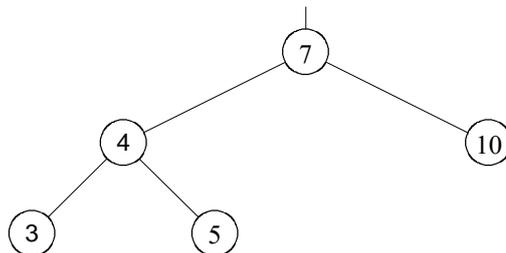


Fig. 5.12 Árbol AVL.

### *Solución*

El árbol AVL debe satisfacer en primer lugar la condición de árbol de búsqueda. Para ello, en primer lugar se insertará el 6 a la izquierda de la raíz al ser menor que el 7, a la derecha del 4 al ser mayor, y a la derecha del 5 al ser mayor. La estructura del árbol correspondiente se muestra en la figura 5.13.

La condición de equilibrio no se satisface ya que el nodo de valor 7 tiene altura 3 por la izquierda y 1 por la derecha, es decir, el balance es -2. Por ello es necesario un rebalanceo LR.

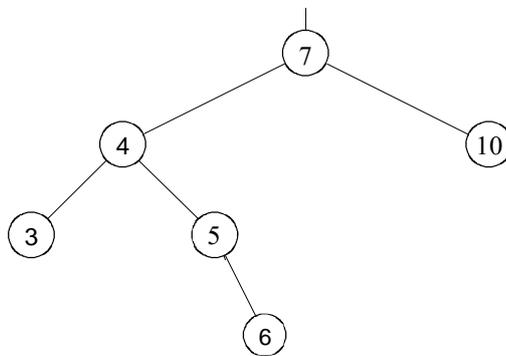
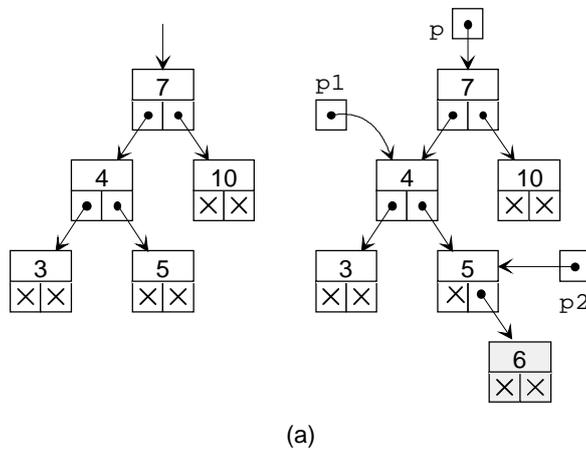


Fig. 5.13 Inserción del elemento 6 en el árbol AVL.

**Rebalanceo LR**

Para realizar el rebalanceo debe considerarse únicamente el subárbol que tiene como raíz el nodo más profundo con balance mayor que 1. En este caso, el subárbol es el árbol completo ya que la raíz es el nodo más profundo con desbalanceo. El detalle del rebalanceo se muestra en la figura 5.14.



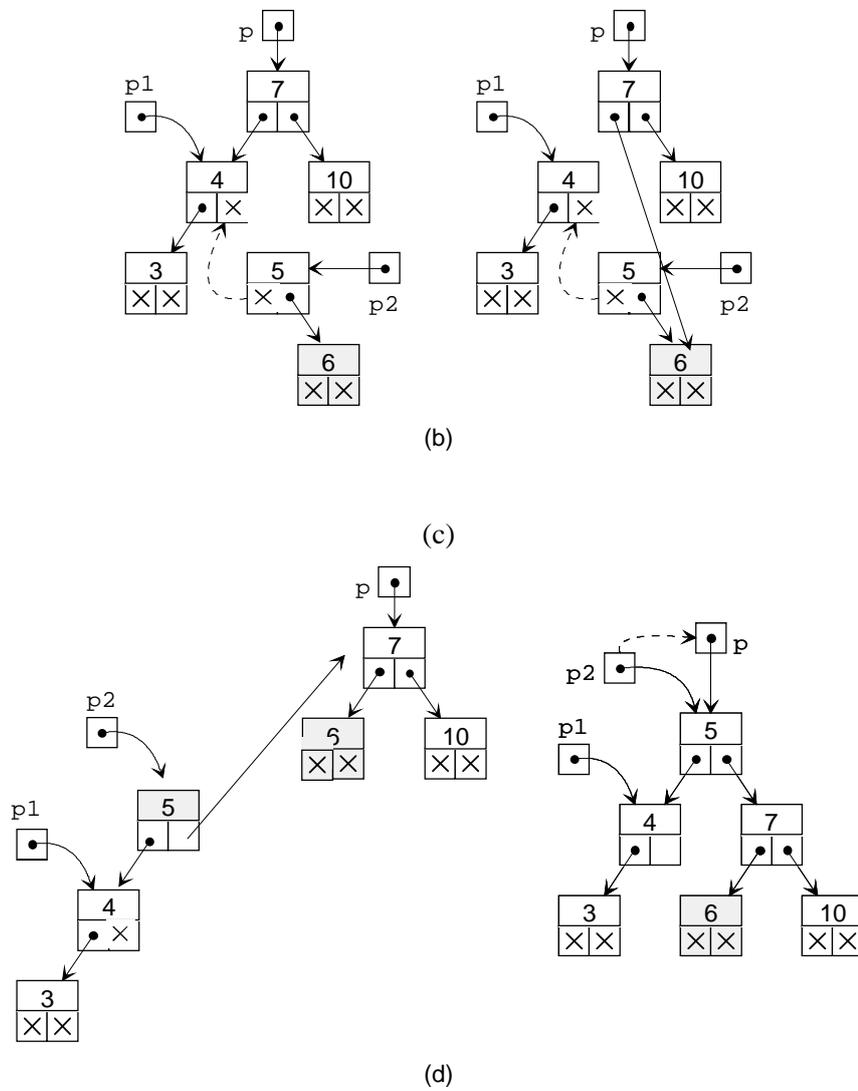


Fig. 5.14 Rebalanceo LR.

Por tanto, el árbol AVL resultante queda como se muestra en la figura 5.15.

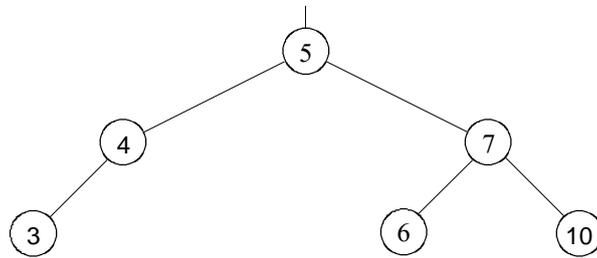


Fig. 5.15 Árbol AVL resultante de la inserción del elemento 6.

*Ejercicio 5.5*

Dado el árbol de la figura 5.16, indicar si es un árbol AVL o no. Razone su respuesta.

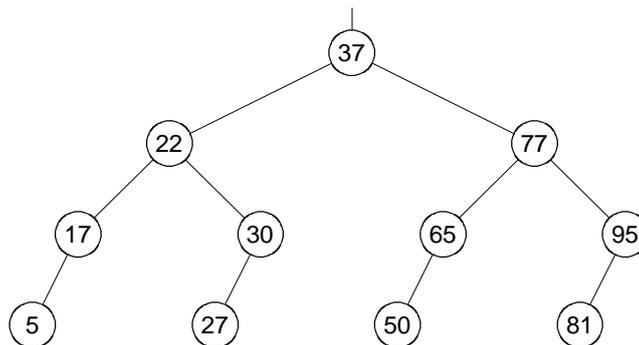


Fig. 5.16 Árbol a analizar.

*Solución*

En primer lugar se observa que se satisface la condición de árbol de búsqueda, ya que para cada nodo los elementos del subárbol izquierdo tienen valores menores que el de la raíz del subárbol y los del subárbol derecho mayores. Así, a la izquierda del 37 todos son menores, a la izquierda del 22 todos son menores que 22 y a su derecha mayores, etc.

Para analizar la condición de equilibrio AVL se consideran las alturas de los subárboles izquierdo y derecho en forma de balance. En la figura 5.17 se muestran los balances para cada nodo.

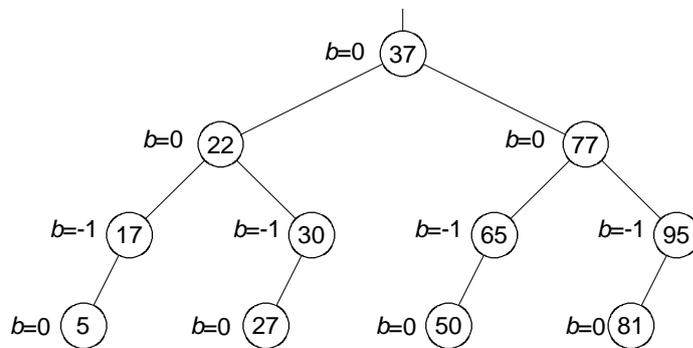


Fig. 5.17 Balances del árbol a analizar.

Como puede observarse para cada nodo la altura de sus subárboles izquierdo y derecho difiere como máximo en 1. En conclusión, el árbol es AVL.

### *Ejercicio 5.6*

Dado el árbol de la figura 5.18, indicar si es un árbol AVL o no. Razone su respuesta.

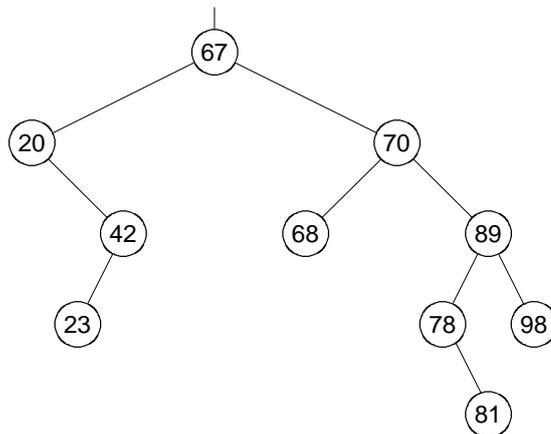


Fig. 5.18 Árbol a analizar.

*Solución*

En primer lugar se observa que se satisface la condición de árbol de búsqueda, ya que para cada nodo los elementos del subárbol izquierdo tienen valores menores que el de la raíz del subárbol y los del subárbol derecho mayores. Así, a la izquierda del 67 todos son menores, a la izquierda del 20 todos son menores (no hay) que 20 y a su derecha mayores, etc.

Para analizar la condición de equilibrio AVL se consideran las alturas de los subárboles izquierdo y derecho en forma de balance. En la figura 5.19 se muestran los balances para cada nodo.

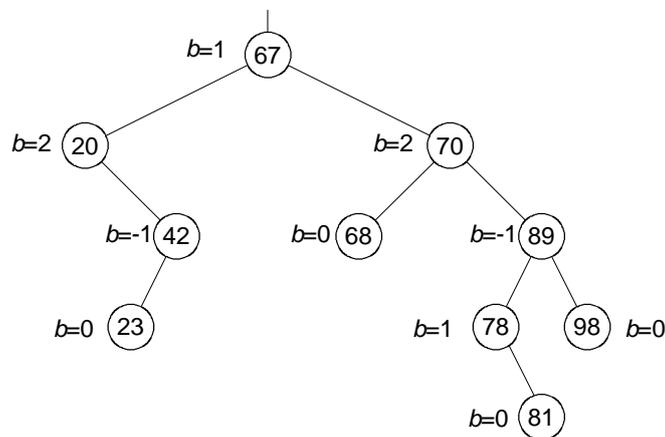


Fig. 5.19 Balances del árbol a analizar.

Como puede observarse, tanto el hijo izquierdo de la raíz del árbol como el derecho, con valores 20 y 70 respectivamente, tienen balance 2, es decir, la altura de sus respectivos subárboles derechos e izquierdos difieren en dos. Por tanto, no se satisface la condición de equilibrio y es árbol no es AVL.

*Ejercicio 5.7*

Dado el árbol AVL de la figura 5.20, indicar la secuencia de pasos necesaria para insertar el valor 38.

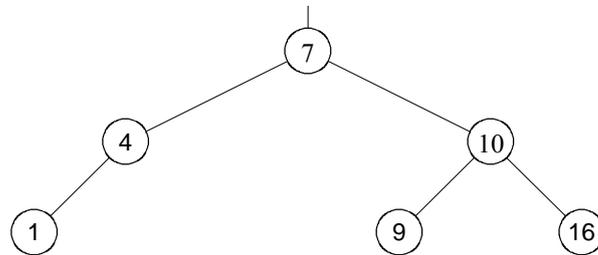


Fig. 5.20 Árbol AVL.

### *Solución*

El árbol AVL debe satisfacer en primer lugar la condición de árbol de búsqueda. Para ello, en primer lugar se insertará el 38 a la derecha de la raíz al ser mayor que el 7 y a la derecha del 10 y del 16 al ser mayor que ambos (véase la figura 5.21).

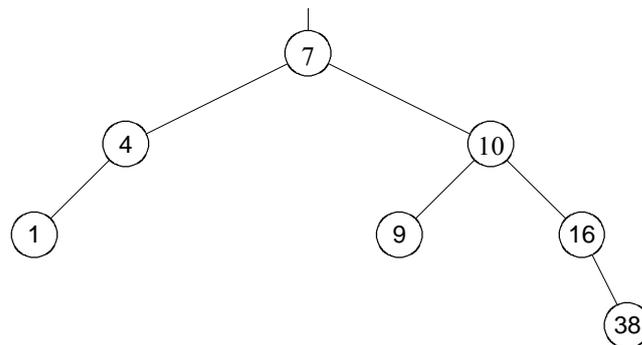


Fig. 5.21 Inserción del elemento 38 en el árbol AVL.

La condición de equilibrio de los árboles AVL se satisface ya que para cada nodo la diferencia de alturas entre sus subárboles izquierdo y derecho es como máximo uno, tal y como muestran los balances de la figura 5.22. Por tanto, no es necesario rebalanceo.

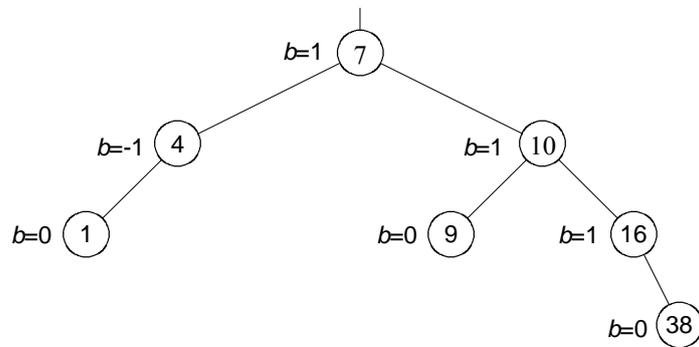


Fig. 5.22 Balances del árbol AVL tras la Inserción del elemento 38.

*Ejercicio 5.8*

Dado el árbol AVL de la figura 5.23, indicar la secuencia de pasos necesaria para insertar el valor 9.

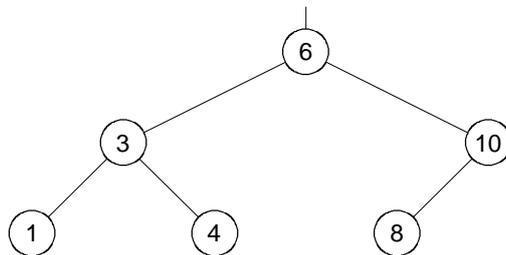


Fig. 5.23 Árbol AVL.

*Solución*

El árbol AVL debe satisfacer en primer lugar la condición de árbol de búsqueda. Para ello, en primer lugar se insertará el 9 a la derecha de la raíz al ser mayor que el 6, y a la izquierda del 10 al ser menor y a la derecha del 8 al ser mayor (véase la figura 5.24).

La condición de equilibrio no se satisface ya que el nodo de valor 10 tiene altura 2 por la izquierda y 0 por la derecha, es decir, el balance es -2. Por ello es necesario un sencillo rebalanceo LR, quedando la estructura del árbol AVL mostrada en la figura 5.25.

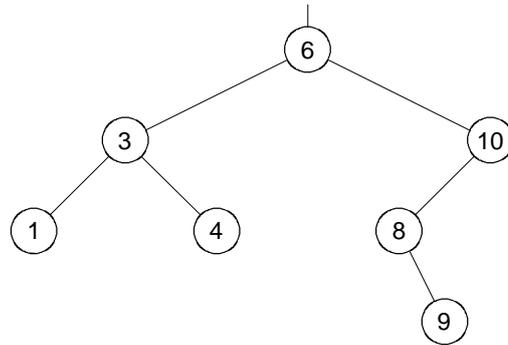


Fig. 5.24 Inserción del elemento 9 en el árbol AVL.

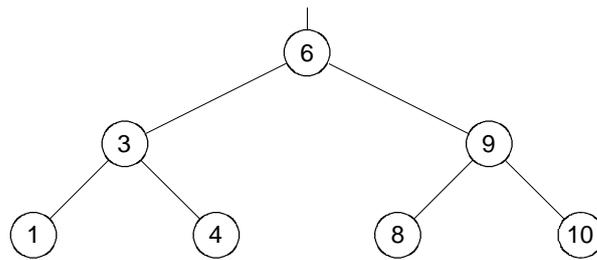


Fig. 5.25 Estado del árbol AVL después del rebalanceo LR provocado por la Inserción del elemento 9 en el árbol AVL original.