

# MINIMIZACIÓN DE FUNCIONES LÓGICAS

- 1.- Concepto de minimización; implicantes primos
- 2.- Minimización en diagramas de Karnaugh.
- 3.- Método de Quine-McCluskey.
- 4.- Técnica de selección de Petrick.
- 5.- Simplificación multifuncional.

## 1 CONCEPTO DE MINIMIZACIÓN. IMPLICANTES PRIMOS

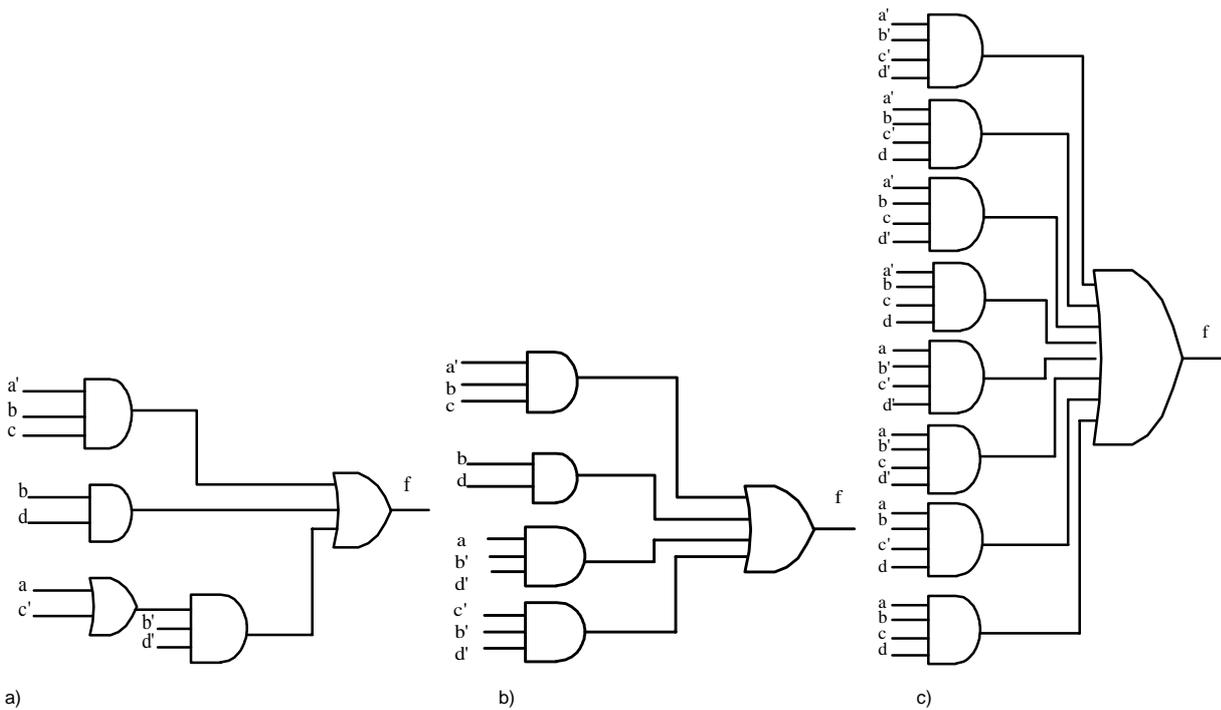
Minimizar una función en sentido clásico consiste en obtener una expresión de la misma que contenga el mínimo número posible de términos (producto o suma), de forma que cada término contenga el mínimo número de literales. Como se puede suponer, es necesario adaptar estos criterios a las escalas crecientes de integración de CI's.

En el sentido clásico, por tanto, se minimiza para reducir el coste económico a la hora de implementar un circuito. Otro factor de importancia, no obstante, comparable al precio es la velocidad de respuesta del sistema digital, lo que se traduce en un interés por reducir el número de puertas lógicas que deben atravesar sucesivamente las entradas. Podemos entender más claramente ambos factores de diseño con un ejemplo.

Ejemplo: Sea la función digital de cuatro variables expresada de tres modos equivalentes:

$$f(a, b, c, d) = bc\bar{a} + bd + \bar{b}\bar{d}(a + \bar{c}) = bc\bar{a} + bd + \bar{b}\bar{d}a + \bar{b}\bar{d}\bar{c} = \Sigma m(0, 5, 6, 7, 8, 10, 13, 15)$$

La figura 1 ilustra la traducción de cada una de las expresiones a puertas lógicas.



a) b) c)  
Fig 1. Implementación de algunas de las expresiones de la función f.

Desde el punto de vista económico, la solución c) parece la menos ventajosa, resultando a a) y la b) más baratas (sólo cinco puertas). Desde el punto de vista de la velocidad, los circuitos más eficaces son el b) y el c), pues las señales sólo atraviesan dos niveles de puertas, un primer nivel de puertas AND, y un segundo de OR. Reuniendo ambos criterios, economía y velocidad, se concluye que el circuito más eficiente es el b).

Como consecuencia de lo comentado en el párrafo anterior, a partir de ahora la minimización de las funciones será una búsqueda de expresiones del tipo suma de productos, procurando que sean lo más reducidos posible. Puesto que resulta más caro añadir nuevas puertas que usar puertas con mayor número de entradas, se buscará en primer lugar reducir el número de puertas. Bajo estas premisas, se define una expresión como mínima si:

- . No existe otra expresión equivalente que contenga menos términos producto.
- . No existe otra expresión equivalente con igual número de términos producto pero menos literales.

Hay que tener en cuenta que pueden existir varias expresiones mínimas para una misma función.

En la expresión mínima, habitualmente se presupone que es una suma de términos producto y a veces como producto de términos suma. Es decir, sólo con conectivas lógicas AND, OR y NOT. Pero para algunas funciones podría haber expresiones más reducidas si se incluyeran otras conectivas.

Ejemplo:  $f(x_1, x_2, x_3) = \overline{x_2}x_3 + x_2\overline{x_3} + x_1x_3 = x_2 \oplus x_3 + x_1x_3$

Antes de introducirnos en los distintos métodos de minimización, vamos a presentar los conceptos de **implicación** e **implicante primo**, que nos serán de utilidad más adelante, así como algunos teoremas relacionados con ellos.

Una expresión  $X$  **implica** a una expresión  $Y$  ( $X \Rightarrow Y$ ) si  $Y$  vale 1 siempre que  $X$  vale 1. Dicho de otra forma: todos los 1's de  $X$  están en  $Y$ , aunque  $Y$  pueda tener más 1's.

Se dice que un término producto  $\alpha$  es un **implicante** de una función  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  si  $\alpha$  implica cualquier expresión  $Y$  de la función  $f$ .

Ejemplo: Dada la función  $f(x_1, x_2, x_3) = \overline{x_1}\overline{x_2}x_3 + x_1\overline{x_2}x_3 + x_1x_2x_3$  su tabla de la verdad es:

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$f$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

Se tienen estas implicaciones lógicas:

$$\overline{x_2}x_3 \Rightarrow f$$

$$\overline{x_1}\overline{x_2}x_3 \Rightarrow f$$

$$x_1\overline{x_2}x_3 \Rightarrow f$$

$$\left. \begin{array}{l} \overline{x_1}\overline{x_2}x_3 \\ x_1\overline{x_2}x_3 \end{array} \right\} \Rightarrow \overline{x_2}x_3 \Rightarrow f$$

En general, todo término producto perteneciente a la expresión de una función (desarrollada como suma de productos), es un implicante de la función. Por ello, los minterms de una función son implicantes de la función. Pero también hay otros términos producto que no forman parte de la expresión de la función y sí son implicantes.

**Teorema 1.** Un término producto  $\alpha$  implica a otro  $\beta$ , si y sólo si cada literal de  $\beta$  es un literal de  $\alpha$ .

$$[\alpha \Rightarrow \beta] \Leftrightarrow [\forall x_i \in \beta \Rightarrow x_i \in \alpha]$$

Demostración.

**Implicación directa**  $[\alpha \Rightarrow \beta] \Rightarrow [\forall x_i \in \beta \Rightarrow x_i \in \alpha]$ . Lo haremos por reducción a absurdo.

Supongamos que  $x_i$  es literal de  $\beta$  pero no de  $\alpha$ . Si llamamos  $\gamma$  a la parte de  $\beta$  que no incluye a  $x_i$ , entonces  $\beta = x_i \cdot \gamma$ .

Por otra parte, dado el término  $\alpha$ , existirá alguna combinación de entradas para la cual  $\alpha=1$ ; y puesto que  $x_i$  no es literal de  $\alpha$ , para esa combinación de entrada  $x_i$  puede ser 0. Entonces  $\beta = x_i \cdot \gamma = 0 \cdot \gamma = 0$  para esa combinación; y por tanto  $\alpha$  no puede implicar a  $\beta$ .

**Implicación inversa**  $[\alpha \Rightarrow \beta] \Leftarrow [\forall x_i \in \beta \Rightarrow x_i \in \alpha]$ .

Supongamos que todo literal de  $\beta$  es literal de  $\alpha$ . Entonces  $\alpha = \beta \cdot \gamma$ , donde  $\gamma$  es el término producto que incluye todos los literales de  $\alpha$  que no están en  $\beta$ . Es evidente que  $\alpha$  sólo puede ser 1 cuando  $\beta=1$ . por tanto, los 1's de  $\alpha$  implican 1's de  $\beta$  ( $\alpha \Rightarrow \beta$ ).

Resulta evidente que la relación de implicación es antisimétrica (si  $X \Rightarrow Y$  e  $Y \Rightarrow X$  entonces  $X=Y$ ) y transitiva (si  $X \Rightarrow Y$  e  $Y \Rightarrow Z$  entonces  $X \Rightarrow Z$ ). Además, se verifica que si  $X \Rightarrow Y$  entonces  $X \cdot Y = X$  (pues si  $X \Rightarrow Y$  entonces  $X = Y \cdot \gamma$ ,  $X \cdot Y = Y \cdot \gamma \cdot Y = Y \cdot \gamma = X$ ).

Un implicante  $\alpha$  de una función  $f$  se dice que es **implicante primo** de  $f$  si no existe un término producto  $\gamma$  con menos literales que  $\alpha$  tal que  $\alpha \Rightarrow \gamma \Rightarrow f$ . Es decir, si al eliminar cualquier variable de  $\alpha$ , el producto resultante ya no es implicante de la función.

**Teorema 2.** Toda expresión mínima de una función  $f$  es una suma de implicantes primos.

Demostración.

Supongamos que  $X$  representa una expresión mínima de  $f$  en la que hay un término producto  $\alpha$  que no es implicante primo. Por tanto, existe un término producto  $\gamma$  tal que  $\alpha \Rightarrow \gamma \Rightarrow f$ ; y  $\gamma$  tiene menos literales.

Si llamamos  $\delta$  a la expresión resultante de eliminar  $\alpha$  de  $X$ , entonces podemos poner:  $X = \delta + \alpha$ . Ahora construimos la expresión  $Y = \delta + \gamma$ . Si  $X$  es una expresión de  $f$ :  $X \Rightarrow f$  y  $f \Rightarrow X$ ; y como  $\gamma \Rightarrow f$ , por la propiedad transitiva  $\gamma \Rightarrow X$ . Por tanto:  $\gamma = \gamma \cdot X$ .

Puesto que  $\alpha \Rightarrow \gamma$ , se verifica que  $\alpha = \gamma \cdot \alpha$ . Entonces:  $\gamma = \gamma \cdot X = \gamma \cdot (\delta + \alpha) = \gamma \cdot \delta + \gamma \cdot \alpha = \gamma \cdot \delta + \alpha$ .

Sustituyendo este resultado en la expresión de  $Y$ :  $Y = \delta + \gamma = \delta + \gamma \delta + \alpha = \delta + \alpha = X$ . Lo que nos dice que  $Y$  es otra expresión de  $f$ , formada, además, sólo por implicantes primos.

Como consecuencia, al sustituir  $\alpha$  por el implicante primo asociado  $\gamma$ , obtenemos otra expresión  $Y$  de la función que contiene sólo implicantes primos, en la que uno de los productos contiene menos literales que en la expresión "mínima" de  $f$ . ¡Luego no es mínima!

En términos del teorema anterior, sabemos que una expresión mínima de una función ha de estar formada por implicantes primos. Sin embargo, el teorema no nos dice cómo elegir los implicantes apropiados del conjunto de todos los implicantes primos. En general, la minimización deberá realizarse obteniendo el conjunto de los implicantes primos de  $f$  y, apoyándose en principios heurísticos, seleccionar algunos de ellos.

**Teorema 3.** La expresión que se obtiene sumando todos los implicantes primos de una función es una expresión de la función (aunque quizá no sea mínima).

Demostración.

Si  $X = \sum p_i$  ( $p_i$  implicantes primos), bastará con demostrar que  $X \Rightarrow f$  y  $f \Rightarrow X$ .

Implicación  $X \Rightarrow f$ .

Es evidente:

$\forall (x_1, x_2, \dots, x_n) \in K^n \mid X=1 \Rightarrow \exists p_i=1$ , siendo  $p_i$  un implicante de  $f$ , por tanto también  $f=1$

Implicación  $f \Rightarrow X$ .

$\forall (x_1, x_2, \dots, x_n) \in K^n \mid f=1 \Rightarrow \exists m_i \mid m_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 1$ . Ahora pueden suceder dos casos:

1º.-  $m_i$  es implicante primo, es decir está en  $X$ . Entonces  $X$  es 1, como se quería demostrar.

2º.-  $m_i$  no es implicante primo, es decir,  $\exists p_i \mid m_i \Rightarrow p_i \Rightarrow f$ . Nos quedamos con  $m_i \Rightarrow p_i$ .

Como  $f \Rightarrow m_i$  (lo dice la primera línea), por la propiedad transitiva  $f \Rightarrow m_i \Rightarrow p_i$  y como  $X = \sum p_i$  se tiene que  $X=1$ .

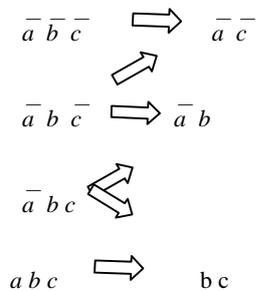
En general, esta suma será más reducida que la forma canónica, pero será redundante en el sentido de que habrá minterms que impliquen más de un implicante primo, de manera que si suprimimos uno de ellos la expresión suma aún representará a la función.

Por último, se dice que un implicante primo  $p_i$  de  $f$  es un **implicante primo esencial** si existe algún minterm  $m_j$  de  $f$  tal que  $m_j \Rightarrow p_i$ , y no existe ningún otro implicante primo tal  $p_r$  que  $m_j \Rightarrow p_r$ . En otras palabras, existe un minterm que sólo implica a dicho implicante primo  $p_i$ . En toda realización de  $f$  como suma de implicantes primos deben entrar forzosamente los esenciales para que todos los minterms queden representados.

El siguiente ejemplo ilustra la redundancia de implicantes primos.

Ejemplo: Sea la función  $f = \sum m(0, 2, 3, 7) = \bar{a} \bar{b} \bar{c} + \bar{a} b \bar{c} + \bar{a} b c + a b c$

Los implicantes primos que se obtienen (no entramos de momento en cómo) son:



a	b	c	f
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

$$f = \sum \text{implicante primos} = \bar{a} \bar{c} + \bar{a} b + b c$$

La expresión que supone este sumatorio no es mínima, ya que la expresión  $\bar{a} \bar{c} + b c$  sigue representando a la función en estudio. La redundancia proviene de que  $\bar{a} b$  es implicado sólo por minterms que ya implican a otros. Los otros dos implicantes primos sí son esenciales.

## 2 DIAGRAMAS DE KARNAUGH

La simplificación de las funciones en el diagrama de Karnaugh se basa en el hecho de que los conjuntos de minterms que se pueden combinar en términos producto más simples serán adyacentes o aparecerán en patrones simétricos en el diagrama. Antes de describir la técnica de minimización con estos diagramas, es conveniente fijar algunos conceptos relacionados con los patrones que pueden encontrarse en estos diagramas.

**Adyacencia de orden 0.** Se llama así a toda celda en el diagrama de Karnaugh. Un diagrama de una función de  $n$  variables contiene  $2^n$  celdas, cada una de las cuales está asociada a un minterm. Si este minterm está en la función, en la celda se escribe un 1. Si no está, se deja vacía.

**Adyacencia de orden 1.** Es la yuxtaposición de dos adyacencias de orden 0 simétricas respecto a algún eje. Una adyacencia de este tipo simplifica dos minterms en uno solo, con  $n-1$  literales.

**Adyacencia de orden 2.** Es la yuxtaposición de dos adyacencias simétricas de orden 1 respecto a algún eje. Es decir, cuatro celdas, simétricas respecto a dos ejes. Una adyacencia de este tipo simplifica cuatro minterms en uno solo, con  $n-2$  literales.

En general:

**Adyacencia de orden  $k$ .** Es la yuxtaposición de dos adyacencias simétricas de orden  $k-1$  respecto a algún eje. Es decir,  $2^k$  celdas, simétricas respecto a  $k$  ejes. Una adyacencia de este tipo simplifica  $2^k$  minterms en uno solo, con  $n-k$  literales.

El diagrama de Karnaugh proporciona un procedimiento para reducir la expresión de una función digital. Se trata de localizar adyacencias que pertenezcan a la función. El término producto representativo de la adyacencia formará parte de la expresión de la función sustituyendo a los minterms de los que procede.

Ejemplo: Sea la función de cuatro variables representada con el diagrama de la figura:

$x_3 x_4$ \ $x_1 x_2$	00	01	11	10
00		1		
01	1		1	1
11			1	1
10		1		

Como se ve, existen una adyacencia de orden 2 y dos adyacencias de orden 1.

Aplicando teoremas y propiedades, se podría simplificar así:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \underbrace{\bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 x_4 + x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 x_4}_{\bar{x}_2 \bar{x}_3 x_4} + \underbrace{\bar{x}_1 x_2 x_3 \bar{x}_4 + \bar{x}_1 x_2 x_3 x_4}_{\bar{x}_1 x_2 x_3} + \underbrace{x_1 x_2 x_3 x_4 + x_1 x_2 x_3 \bar{x}_4}_{x_1 x_2 x_3}$$

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \bar{x}_2 \bar{x}_3 x_4 + x_2 x_3 + \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4$$

Pero esta no es la expresión mínima, pues se pueden asociar los minterms  $\bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4$  y  $x_1 x_2 x_3 \bar{x}_4$  para producir el implicante

$$\bar{x}_1 x_2 \bar{x}_4$$

Nótese que el implicante  $\bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4$  no era implicante primo

La forma más simple (más adelante se verá al algoritmo mediante el cual se llega a ella) es

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \bar{x}_2 \bar{x}_3 x_4 + x_2 x_3 + \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_4$$

## 2.1.- Algoritmo de minimización en el diagrama de Karnaugh

El algoritmo de minimización en el diagrama de Karnaugh es un procedimiento para obtener el conjunto de todos los implicantes primos, junto con unas reglas heurísticas para seleccionar un subconjunto suficiente de ellos. Consta de los siguientes pasos:

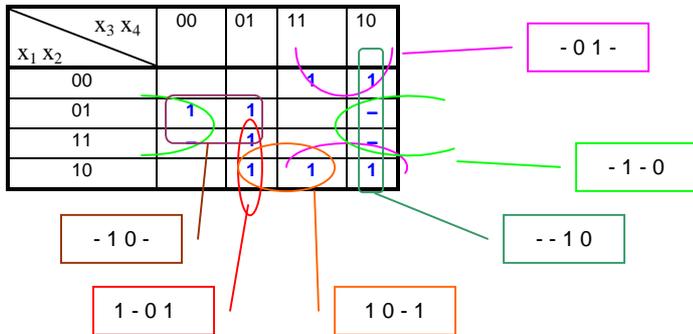
1º.- Extracción de todas las adyacencias de orden  $k$ , tal que cada una cumpla las siguientes condiciones:

- ✓ Todas las celdas que la formen contengan 1 o indiferencia.
- ✓ Contenga al menos un 1 (no todo sean indiferencias).
- ✓ No esté contenida completamente en ninguna adyacencia de orden superior que cumpla las anteriores condiciones.

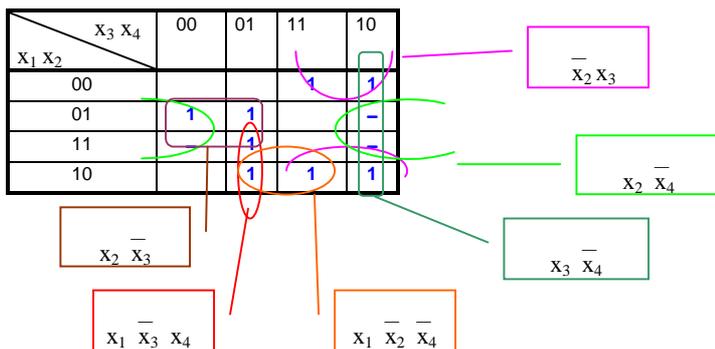
Las adyacencias se nombran manteniendo los 0's y 1's que no cambian dentro de cada adyacencia. Los que cambian se sustituyen por guiones.

Vamos a ver este conjunto de condiciones con un ejemplo.

Ejemplo: Sea la función de cuatro variables representada con el diagrama de la figura:



2º.- Identificación de los términos producto que representa cada adyacencia. Los 1's se sustituyen por la variable de su correspondiente posición (sin negar) y los 0's se sustituyen por la variable negada.



Hasta aquí, el conjunto de todos los productos generados por estos dos pasos constituye el conjunto de todos los implicantes primos de la función. En efecto:

Sean los conjuntos:

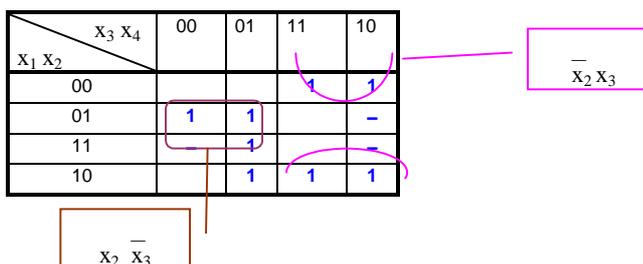
$$P = \{ \text{productos generados por el algoritmo} \}$$

$$Q = \{ \text{implicantes primos de } f \}$$

Si tomamos un elemento  $p \in P$ , al ser una adyacencia de orden  $k$  que contiene 1's o indiferencias estamos hablando de un implicante de la función; y al no existir una adyacencia de orden mayor que la contenga, es un implicante primo. Por tanto,  $p \in Q$ .

Si tomamos un elemento  $q \in Q$ , este implicante primo tendrá una adyacencia asociada que contendrá 1's o indiferencias, por verificarse  $q \Rightarrow f$ . Al ser implicante primo no existirá otro implicante con menos literales (que correspondería a una adyacencia de orden superior) que sea implicado por él. Por tanto  $q \in P$ .

3º.- Se seleccionan todos los implicantes primos esenciales. Es necesario coger estos, pues es la única forma de coger ciertos minterms.



4º.- Los 1's que permanecen sin cubrir, "se recogen con los implicantes primos de menor coste".

$x_3 x_4$	00	01	11	10
$x_1 x_2$			1	1
00			1	1
01	1	1		-
11	-	1		-
10		1	1	1

$$\overline{x_1} \overline{x_3} x_4$$

$$x_1 \overline{x_2} \overline{x_4}$$

En este ejemplo es un 1 el que falta por cubrir. Se puede recoger con cualquiera de las adyacencias de orden 1 en que está incluido, pues ambas tienen el mismo coste. Por este motivo, la función dada tiene dos representaciones mínimas:

$x_3 x_4$	00	01	11	10
$x_1 x_2$				1
00				1
01	1	1		-
11		1		-
10		1	1	1

$$\overline{x_2} x_3$$

$$\overline{x_2} x_3$$

$$\overline{x_1} x_3 x_4$$

$$f = x_2 \overline{x_3} + x_2 x_3 + x_1 \overline{x_3} x_4$$

O bien

$x_3 x_4$	00	01	11	10
$x_1 x_2$				1
00				1
01	1	1		-
11		1		-
10		1	1	1

$$\overline{x_2} x_3$$

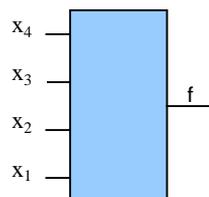
$$\overline{x_2} x_3$$

$$x_1 \overline{x_2} \overline{x_4}$$

$$f = x_2 \overline{x_3} + x_2 x_3 + x_1 \overline{x_2} \overline{x_4}$$

**Indiferencias.** Veamos con un ejemplo cómo podemos aprovechar las indiferencias en la minimización. Ejemplo:

$x_3 x_4$	00	01	11	10
$x_1 x_2$				
00				
01				
11			1	-
10	-			



Las indiferencias significan que jamás se van a producir las combinaciones de entradas

$$(x_1=1, x_2=0, x_3=0, x_4=0)$$

$$(x_1=1, x_2=1, x_3=1, x_4=0)$$

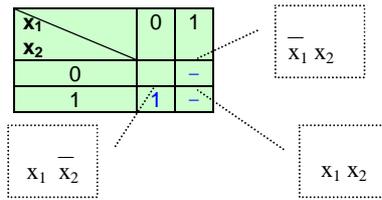
Como tenemos la seguridad de que nunca se van a producir, podemos construir el circuito de forma que, con ellas, generara una salida 0 ó 1, según nos convenga. A la hora de minimizar, nos conviene considerar la primera como un 0; y la segunda como un 1, para asociarlo con el minterm  $x_1 x_2 x_3 x_4$ .

Otra forma de justificar esta picardía es la siguiente:

Siempre que en la entrada aparezcan  $(x_1=1, x_2=1, x_3=1)$ , ya se sabrá que la otra es  $x_4=1$ , pues no es posible  $(x_1=1, x_2=1, x_3=1, x_4=0)$ . Como ya se sabe cuál es la restante (la que provoca la simetría), no es necesario incluirla en la expresión de la función, con lo que el término producto es  $x_1 x_2 x_3$ .

Ejemplo:

$x_1 x_2$	F
00	0
01	-
10	1
11	-

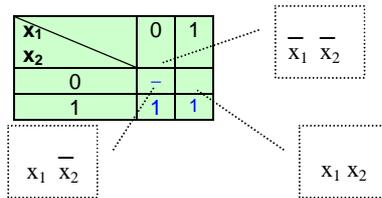


Mal minimizada:  $\bar{x}_1 x_2 + x_1 x_2 = x_2$ . No se pueden coger adyacencias que sólo tengan indeterminaciones.

Bien minimizada:  $x_1 \bar{x}_2 + x_1 x_2 = x_1$ .

Ejemplo:

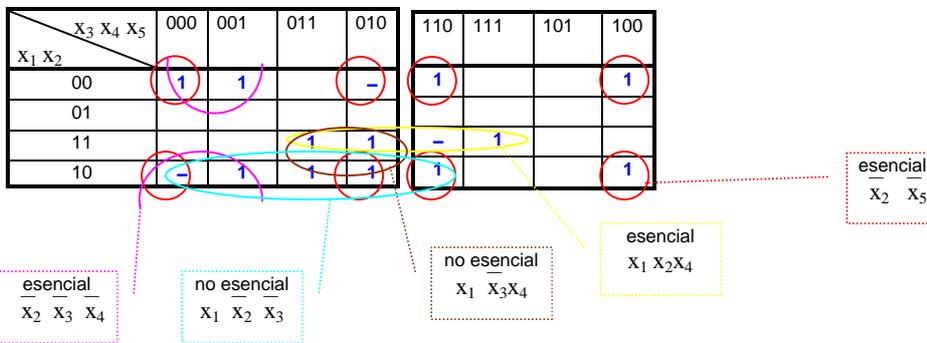
$x_1 x_2$	F
00	-
01	0
10	1
11	1



Mal minimizada:  $\bar{x}_1 \bar{x}_2 + x_1 \bar{x}_2 = \bar{x}_2$ . Para que realmente sea adyacencia, ha de tener al menos un 1 no incluido en otras adyacencias. (un minterm que implique ese implicando primo pero que no implique otros implicando primos)

Bien minimizada:  $x_1 \bar{x}_2 + x_1 x_2 = x_1$ .

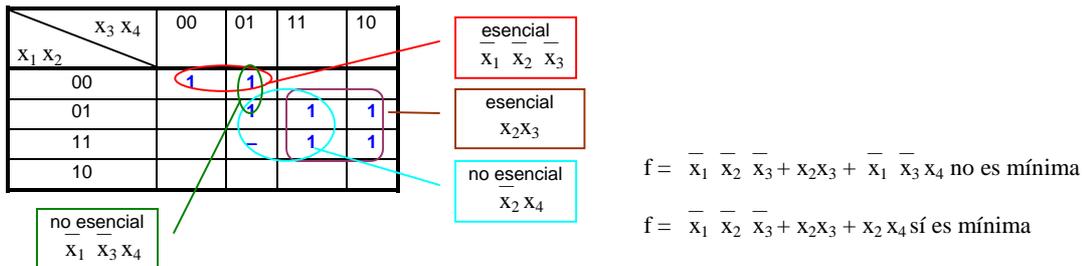
Ejemplo:



$$f = \bar{x}_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 + x_1 x_2 x_4 + \bar{x}_2 \bar{x}_5 + x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3$$

$$f = \bar{x}_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 + x_1 x_2 x_4 + \bar{x}_2 \bar{x}_5 + x_1 \bar{x}_3 x_4$$

Ejemplo:



$$f = \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 + x_2 x_3 + \bar{x}_1 \bar{x}_3 x_4 \text{ no es mínima}$$

$$f = \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 + x_2 x_3 + x_2 x_4 \text{ sí es mínima}$$

En este ejemplo, al aplicar el paso 4º del algoritmo, existe una opción más económica que la otra.

### 3 MÉTODO DE QUINE-McCLUSKEY

A medida que aumenta el número de variables, el método del diagrama de Karnaugh se hace impracticable, pues resulta muy difícil encontrar adyacencias. Dicho método tiene la desventaja de depender de la capacidad humana de visualización de patrones gráficos, lo que le hace propenso a errores.

El método de Quine-McCluskey, aunque es más largo, es un método sistemático, adecuado para ser programado en una computadora. En esencia, también es un búsqueda exhaustiva de todas las adyacencias, comenzando por las de orden inferior y llegando a los implicantes primos. La posterior aplicación del método de Petrick para seleccionar implicantes primos garantiza la mejor realización.

Se define el índice de un término producto como el número de variables no complementadas que contiene. Por ejemplo, el índice de la expresión  $x_1 \bar{x}_2 x_4 x_5$  es 2.

Los pasos que componen el método de Quine-McCluskey los mostraremos con ayuda de un ejemplo.

1°.- Se parte de la función expresada en forma canónica como suma de minterms.

$$f = \sum m(1, 3, 4, 5, 8, 9, 10, 11, 13, 15, 19, 24, 27, 30, 31)$$

2°.- Se clasifican los minterms por sus índices. Dos minterms sólo podrán formar adyacencia si sus índices difieren en una unidad, por lo que esta clasificación facilita la búsqueda de adyacencias.

Índice 1	Índice 2	Índice 3	Índice 4	Índice 5
1... 00001	3... 00011	11... 01011	15... 01111	31... 11111
4... 00100	5... 00101	13... 01101	27... 11011	
8... 01000	9... 01001	19... 10011	30... 11110	
	10... 01010			
	24... 11010			

3°.- Se encuentran todas las adyacencias de orden 1 a partir de los minterms. Para ello se comparan todos los minterms de un índice dado con todos los minterms cuyo índice es superior en una unidad. Si todas las coordenadas son iguales salvo una formarán una adyacencia de primer orden. Las adyacencias así obtenidas se clasifican por grupos.

Índice 1 con índice 2	Índice 2 con Índice 3	Índice 3 con Índice 4	Índice 4 con Índice 5
1-3... 000-1	3-11... 0-011	11-15... 01-11	15-31...-1111
1-5... 00-01	3-19...-0011	11-27...-1011	27-31... 11-11
1-9... 0-001	5-13... 0-101	13-15... 011-1	30-31... 1111-
4-5... 0010-	9-11... 010-1	19-27... 1-011	
8-9... 0100-	9-13... 01-01		
8-10... 010-0	10-11... 0101-		
8-24...-1000			

Los minterms que han sido usados en este paso, se señalan en la tabla del paso anterior. Si hubiese quedado algún minterm sin cubrir, constituiría un implicante primo esencial.

Índice 1	Índice 2	Índice 3	Índice 4	Índice 5
1... 00001 ✓	3... 00011 ✓	11... 01011 ✓	15... 01111 ✓	31... 11111 ✓
4... 00100 ✓	5... 00101 ✓	13... 01101 ✓	27... 11011 ✓	
8... 01000 ✓	9... 01001 ✓	19... 10011 ✓	30... 11110 ✓	
	10... 01010 ✓			
	24... 11010 ✓			

Hay que tener en cuenta que un minterm de índice  $n$  no se compara con aquellos de índice  $n+1$  tales su número binario asociado sea menor que el del minterm dado. Por ejemplo, el minterm de la posición 8 (de índice 1) no es necesario compararlo, en el ejemplo, con los de las posiciones 3 y 5 (índice 2), pues nunca podrán formar adyacencia. Basta observar que para que un minterm de índice  $n$  forme adyacencia con uno de índice  $n+1$ , éste debe tener todos los unos del de índice  $n$  en igual posición, más algún otro, por lo que corresponderá a un número mayor.

Obsérvese también que la diferencia entre los números de minterms adyacentes es, forzosamente, una potencia de 2.

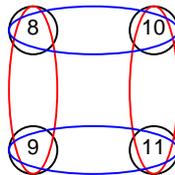
4°.- procediendo de igual modo que en el paso anterior, comparando adyacencias de orden 1 se obtienen las adyacencias de orden 2.

(Índice 1 con índice 2) con (Índice 2 con Índice 3)	(Índice 2 con índice 3) con (Índice 3 con Índice 4)	(Índice 3 con Índice 4) con (Índice 4 con Índice 5)
(1-3)-(9-11)... 0-0-1	(3-19)-(11-27)... --011	(11-15)-(27-31)...-1-11
(1-5)-(9-13)... 0--01	(3-11)-(19-27)... --011	(11-27)-(15-31)...-1-11
(8-9)-(10-11)... 010--	(9-11)-(13-15)... 01--1	
(8-10)-(9-11)... 010--	(9-13)-(11-15)... 01--1	

Los minterms que han sido usados en este paso, se señalan en la tabla del paso anterior. Si hubiese quedado algún minterm sin cubrir, constituiría un implicante primo esencial.

Índice 1 con índice 2	Índice 2 con Índice 3	Índice 3 con Índice 4	Índice 4 con Índice 5
1-3... 0 0 0 - 1 ✓	3-11... 0 - 0 1 1 ✓	11-15... 0 1 - 1 1 ✓	15-31... - 1 1 1 1 ✓
1-5... 0 0 - 0 1 ✓	3-19... - 0 0 1 1 ✓	11-27... - 1 0 1 1 ✓	27-31... 1 1 - 1 1 ✓
1-9... 0 - 0 0 1 ✓	5-13... 0 - 1 0 1 ✓	13-15... 0 1 1 - 1 ✓	30-31... 1 1 1 1 -
4-5... 0 0 1 0 -	9-11... 0 1 0 - 1 ✓	19-27... 1 - 0 1 1 ✓	
8-9... 0 1 0 0 - ✓	9-13... 0 1 - 0 1 ✓		
8-10... 0 1 0 - 0 ✓	10-11... 0 1 0 1 - ✓		
8-24... - 1 0 0 0			

Hay que notar que cada adyacencia de orden 2 ha aparecido dos veces. Por ejemplo (8-9)-(10-11) y (8-10)-(9-11) representan la misma adyacencia de orden 2. Esto corresponde, en la representación geométrica, a los dos posibles modos de conformar una adyacencia de orden 2 con dos adyacencias de orden 1, tomados por parejas distintas. Análogamente, las adyacencias de orden 3 aparecerán tres veces; y así sucesivamente.



Estos pasos se iteran, encontrando progresivamente adyacencias de orden superior, hasta que no se encuentre ninguna más, como sucede en el ejemplo.

5°.- Todas las adyacencias y minterms que hayan quedado sin señalar, se nombran con letras, empezando por el final. A este conjunto de todos los implicantes primos se le aplicará una técnica de selección que se describirá en el siguiente apartado.

(Índice 1 con índice 2) con (Índice 2 con Índice 3)	(Índice 2 con índice 3) con (Índice 3 con Índice 4)	(Índice 3 con Índice 4) con (Índice 4 con Índice 5)
(1-3)-(9-11)... 0 - 0 - 1 (f)	(3-19)-(11-27)... - - 0 1 1 (c)	(11-15)-(27-31)... - 1 - 1 1 (a)
(1-5)-(9-13)... 0 - - 0 1 (e)	(3-11)-(19-27)... - - 0 1 1 (c)	(11-27)-(15-31)... - 1 - 1 1 (a)
(8-9)-(10-11)... 0 1 0 - - (d)	(9-11)-(13-15)... 0 1 - - 1 (b)	
(8-10)-(9-11)... 0 1 0 - - (d)	(9-13)-(11-15)... 0 1 - - 1 (b)	

Índice 1 con índice 2	Índice 2 con Índice 3	Índice 3 con Índice 4	Índice 4 con Índice 5
1-3... 0 0 0 - 1 ✓	3-11... 0 - 0 1 1 ✓	11-15... 0 1 - 1 1 ✓	15-31... - 1 1 1 1 ✓
1-5... 0 0 - 0 1 ✓	3-19... - 0 0 1 1 ✓	11-27... - 1 0 1 1 ✓	27-31... 1 1 - 1 1 ✓
1-9... 0 - 0 0 1 ✓	5-13... 0 - 1 0 1 ✓	13-15... 0 1 1 - 1 ✓	30-31... 1 1 1 1 - (g)
4-5... 0 0 1 0 - (i)	9-11... 0 1 0 - 1 ✓	19-27... 1 - 0 1 1 ✓	
8-9... 0 1 0 0 - ✓	9-13... 0 1 - 0 1 ✓		
8-10... 0 1 0 - 0 ✓	10-11... 0 1 0 1 - ✓		
8-24... - 1 0 0 0 (h)			

### 3.2.- Método práctico

En la práctica no se pone el número binario correspondiente a cada minterm o adyacencia; y la reducción se basa en las observaciones hechas anteriormente.

1º.- Se clasifican los minterms por índices teniendo en cuenta si son potencias de 2 (índice 1), si son suma de dos potencias de 2 (índice 2), si son suma de tres potencias de 2 (índice 3), etc.

Índice 1	Índice 2	Índice 3	Índice 4	Índice 5
1	3	11	15	31
4	5	13	27	
8	9	19	30	
	10			
	24			

La misma advertencia de antes. Cada número de un grupo se debe comparar con números del siguiente, pero números que sean mayores. De lo contrario, sucedería esto:

$$19_d = 10011_b \text{ índice 3}$$

$$15_d = 01111_b \text{ índice 4}$$

difieren en una potencia de 2:

$$19 - 15 = 4 = 2^2$$

pero en sus arrays de dígitos binarios hay tres posiciones en las que tienen dígitos diferentes. No pueden, por tanto, formar adyacencia.

2º.- Se comparan pares de grupos contiguos comprobando si difieren en una potencia de 2 (adyacencia de primer orden), y se marcan en la tabla anterior los minterms cubiertos. Se coloca entre paréntesis la diferencia entre minterms.

Índice 1 con índice 2	Índice 2 con Índice 3	Índice 3 con Índice 4	Índice 4 con Índice 5
1-3 (2)	3-11 (8)	11-15 (4)	15-31 (16)
1-5 (4)	3-19 (16)	11-27 (8)	27-31 (4)
1-9 (8)	5-13 (8)	13-15 (2)	30-31 (1)
4-5 (1)	9-11 (2)	19-27 (8)	
8-9 (1)	9-13 (4)		
8-10 (2)	10-11 (1)		
8-24 (16)			

Los minterms que han sido usados en este paso, se señalan en la tabla del paso anterior. Si hubiese quedado algún minterm sin cubrir, constituiría un implicante primo esencial.

Índice 1	Índice 2	Índice 3	Índice 4	Índice 5
1 ✓	3 ✓	11 ✓	15 ✓	31 ✓
4 ✓	5 ✓	13 ✓	27 ✓	
8 ✓	9 ✓	19 ✓	30 ✓	
	10 ✓			
	24 ✓			

3º.- Se obtienen las adyacencias de orden 2 comparando las adyacencias de un grupo con las del contiguo que tengan igual diferencia entre paréntesis. Se nota si son adyacentes observando si la diferencia minterm a minterm es una potencia de 2. Se coloca en este caso entre paréntesis el número anterior y la diferencia.

(Índice 1 con índice 2) con (Índice 2 con Índice 3)	(Índice 2 con índice 3) con (Índice 3 con Índice 4)	(Índice 3 con Índice 4) con (Índice 4 con Índice 5)
(1-3)-(9-11) (2, 8)	(3-19)-(11-27) (8, 16)	(11-15)-(27-31) (4, 16)
(1-5)-(9-13) (4, 8)	(3-11)-(19-27) (8, 16)	(11-27)-(15-31) (4, 16)
(8-9)-(10-11) (1, 2)	(9-11)-(13-15) (2, 4)	
(8-10)-(9-11) (1, 2)	(9-13)-(11-15) (2, 4)	

Los minterms que han sido usados en este paso, se señalan en la tabla del paso anterior. Si hubiese quedado algún minterm sin cubrir, constituiría un implicante primo esencial.

Índice 1 con índice 2	Índice 2 con Índice 3	Índice 3 con Índice 4	Índice 4 con Índice 5
1-3 ✓	3-11 ✓	11-15 ✓	15-31 ✓
1-5 ✓	3-19 ✓	11-27 ✓	27-31 ✓
1-9 ✓	5-13 ✓	13-15 ✓	30-31
4-5	9-11 ✓	19-27 ✓	
8-9 ✓	9-13 ✓		
8-10 ✓	10-11 ✓		
8-24			

Este proceso se repite hasta que no se puedan obtener más adyacencias, como ha sucedido en el ejemplo. Ahora se nombra de atrás hacia delante las adyacencias y minterms que quedaron sin cubrir.

(Índice 1 con índice 2) con (Índice 2 con Índice 3)	(Índice 2 con índice 3) con (Índice 3 con Índice 4)	(Índice 3 con Índice 4) con (Índice 4 con Índice 5)
(1-3)-(9-11) (2, 8) (f) (1-5)-(9-13) (4, 8) (e) (8-9)-(10-11) (1, 2) (d) (8-10)-(9-11) (1, 2) (d)	(3-19)-(11-27) (8, 16) (c) (3-11)-(19-27) (8, 16) (c) (9-11)-(13-15) (2, 4) (b) (9-13)-(11-15) (2, 4) (b)	(11-15)-(27-31) (4, 16) (a) (11-27)-(15-31) (4, 16) (a)

Índice 1 con índice 2	Índice 2 con Índice 3	Índice 3 con Índice 4	Índice 4 con Índice 5
1-3 (2) ✓ 1-5 (4) ✓ 1-9 (8) ✓ 4-5 (1) (i) 8-9 (1) ✓ 8-10 (2) ✓ 8-24 (16) (h)	3-11 (8) ✓ 3-19 (16) ✓ 5-13 (8) ✓ 9-11 (2) ✓ 9-13 (4) ✓ 10-11 (1) ✓	11-15 (4) ✓ 11-27 (8) ✓ 13-15 (2) ✓ 19-27 (8) ✓	15-31 (16) ✓ 27-31 (4) ✓ 30-31 (1) (g)

La expresión de cada implicante primo en forma de término producto se obtiene a partir de los números entre paréntesis. Por ejemplo:

$$(3-11)-(19-27) \quad (8, 16)$$

$$\begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ \hline 1 & 8 & 4 & 2 & 1 \end{matrix}$$

Para conocer si las variables que quedan sin tachar van complementadas o sin complementar, basta comparar con el menor de los minterms que componen la adyacencia. En el ejemplo:

$$3 \rightarrow 00011 \rightarrow \overline{x_3}x_4x_5$$

De este modo, en el ejemplo obtenemos el siguiente conjunto de implicantes primos:

- (a)  $x_2x_4x_5$
- (b)  $\overline{x_1}x_2x_5$
- (c)  $\overline{x_3}x_4x_5$
- (d)  $\overline{x_1}x_2 \overline{x_3}$
- (e)  $\overline{x_1} \overline{x_4}x_5$
- (f)  $\overline{x_1} \overline{x_3}x_5$
- (g)  $x_1 x_2x_3x_4$
- (h)  $x_2 \overline{x_3} \overline{x_4} \overline{x_5}$
- (i)  $\overline{x_1} \overline{x_2} x_3 \overline{x_4}$

### 3.3.- Selección de implicantes primos

Para efectuar la selección se construye una tabla de implicantes primos disponiendo éstos por orden alfabético en el eje de ordenadas; y disponiendo los minterms de la función en el eje de abscisas:

	1	3	4	5	8	9	10	11	13	15	19	24	27	30	31
a									*	*			*		*
b						*		*	*	*					
c		*					*	*	*		*		*		
d				*	*	*	*	*			*				
e	*			*		*			*						
f	*	*			*		*	*							
g														*	*
h					*						*				
i		*	*								*				

En esta tabla para cada minterm se señalan con una cruz los implicantes primos que implica.

Por ejemplo, el minterm 3  $\bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 x_4 x_5$  implica al implicante  $c \bar{x}_3 x_4 x_5$  y al implicante  $f \bar{x}_1 \bar{x}_3 x_5$ .

Ahora es muy fácil localizar los implicantes primos esenciales viendo aquellos minterms en cuya columna sólo hay una cruz. Se marcan con un círculo el implicante primo esencial y los minterms que realiza. En el ejemplo en curso son esenciales los implicantes  $c, d, g, h, i$ .

El procedimiento para seleccionar los implicantes no esenciales necesarios para cubrir la función pasa por hacer una tabla de implicantes reducida, eliminando los implicantes primos esenciales y los minterms ya cubiertos.

	1	13	15
a			*
h		*	*
e	*	*	
f	*		

Antes de seguir con el proceso de minimización daremos un par de definiciones:

Dos filas en una tabla de implicantes primos son **intercambiables** cuando representan implicantes primos del mismo orden y cubren los mismos minterms. Sólo pueden existir en tablas reducidas. Dadas varias filas intercambiables, se pueden eliminar todas menos una, que usaremos en la minimización. En el ejemplo no tenemos filas intercambiables.

Una fila  $a$  en una tabla de implicantes primos **domina** a otra  $b$ , si  $a$  cubre al menos los mismos minterms que  $b$ . En el ejemplo,  $e$  domina a  $f$  y  $b$  domina a  $a$ .

El  $e \bar{x}_1 \bar{x}_4 x_5$  está implicado por:

- el 1:  $\bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 x_5$ .
- el 13:  $\bar{x}_1 x_2 x_3 \bar{x}_4 x_5$ .
- y otros ya incluidos

El  $f \bar{x}_1 \bar{x}_4 x_5$  está implicado por:

- el 1:  $\bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 x_5$ .
- y otros ya incluidos

Por tanto, si incluimos el  $e$ , estamos incluyendo a este conjunto y no hace falta incluir al  $f$ .

Después de esto, se eliminan las filas dominadas, obteniendo una nueva tabla reducida:

	1	13	15
b		*	*
e	*	*	

El proceso se itera tantas veces como sea necesario, marcando los implicantes primos esenciales secundarios y los minterms que cubren, dejando una nueva tabla reducida (si existe). En el ejemplo, la minimización concluye en este paso y la función queda, finalmente:

$$f = \sum imp(b, c, d, e, g, h, i) = \bar{x}_1 x_2 x_5 + \bar{x}_3 x_4 x_5 + \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 + \bar{x}_1 \bar{x}_4 x_5 + x_1 x_2 x_3 x_4 + x_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 \bar{x}_5 + \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 \bar{x}_4$$

Ejemplo:

1º.- Se parte de la función expresada en forma canónica como suma de minterms.

$$f = \Sigma m(4, 5, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15)$$

2º.- Se clasifican los minterms por sus índices.

Índice 1	Índice 2	Índice 3	Índice 4
4... 0 1 0 0	5... 0 1 0 1	7... 0 1 1 1	15... 0 1 1 1
8... 1 0 0 0	9... 1 0 0 1	11... 1 0 1 1	
	10... 1 0 1 0	13... 1 1 0 1	
	12... 1 1 0 0	14... 1 1 1 0	

3º.- Se encuentran todas las adyacencias de orden 1 a partir de los minterms. Para ello se comparan todos los minterms de un índice dado con todos los minterms cuyo índice es superior en una unidad.

Índice 1 con índice 2	Índice 2 con Índice 3	Índice 3 con Índice 4
4-5... 0 1 0 -	5-7... 0 1 - 1	7-15... - 1 1 1
4-12... - 1 0 0	5-13... - 1 0 1	11-15... 1 - 1 1
8-9... 1 0 0 -	9-11... 1 0 - 1	13-15... 1 1 - 1
8-10... 1 0 - 0	9-13... 1 - 0 1	14-15... 1 1 1 -
8-12... 1 - 0 0	10-11... 1 0 1 -	
	10-14... 1 - 1 0	
	12-13... 1 1 0 -	
	12-14... 1 1 0 0	

4º.- procediendo de igual modo que en el paso anterior, comparando adyacencias de orden 1 se obtienen las adyacencias de orden 2.

(Índice 1 con índice 2) con (Índice 2 con Índice 3)	(Índice 2 con índice 3) con (Índice 3 con Índice 4)
(4-5)-(12-13)... - 1 0 -	(5-7)-(13-15)... - 1 - 1
(4-12)-(5-13)... - 1 0 -	(5-7)-(13-15)... - 1 - 1
(8-9)-(10-11)... 1 0 - -	(9-11)-(13-15)... 1 - - 1
(8-9)-(12-13)... 1 - 0 -	(9-13)-(11-15)... 1 - - 1
(8-10)-(9-11)... 1 0 - -	(10-11)-(14-15)... 1 - 1 -
(8-10)-(12-14)... 1 - - 0	(10-14)-(11-15)... 1 - 1 -
(8-12)-(9-13)... 1 - 0 -	(12-13)-(14-15)... 1 1 - -
(8-12)-(10-14)... 1 - - 0	(12-14)-(13-15)... 1 1 - -

Si descontamos los repetidos, tenemos:

(Índice 1 con índice 2) con (Índice 2 con Índice 3)	(Índice 2 con índice 3) con (Índice 3 con Índice 4)
(4-5)-(12-13)... - 1 0 -	(5-7)-(13-15)... - 1 - 1
(8-9)-(10-11)... 1 0 - -	(9-11)-(13-15)... 1 - - 1
(8-9)-(12-13)... 1 - 0 -	(10-11)-(14-15)... 1 - 1 -
(8-10)-(12-14)... 1 - - 0	(12-14)-(13-15)... 1 1 - -

5º.- Todavía se puede hacer otra asociación más, para dar lugar a una adyacencia de orden 3.

(Índice 1 con índice 2) con (Índice 2 con Índice 3)	con	(Índice 2 con índice 3) con (Índice 3 con Índice 4)
[ (8-9)-(10-11) ] - [ (12-14)-(13-15) ]... 1 - - -		

Para efectuar la selección construimos la tabla de implicantes primo, pero aquí sólo se representa la parte que nos interesa.

1 - - -	4	5	7	8	9	10	11	12	13	14	15
-10 -	X	X						X	X		
-1 - 1		X	X						X	X	X

La selección no la haremos de ningún modo sistemático, sino mediante el sentido común. Observamos que si elegimos el implicante (1 - - -), sólo nos falta por recoger los minterms  $m_4$ ,  $m_5$  y  $m_7$ . Además, para recoger estos tres minterms, basta con elegir los implicantes (-1 0 -) y (-1 - 1). Así pues, ya tenemos cubiertos todos, con lo cual, la función minimizada es:

$$f = x_1 + x_2 \bar{x}_3 + x_2 x_4$$

Ejemplo:

1°.- Se parte de la misma función, pero expresada en forma canónica como producto de maxterms.

$$f = \prod M(9, 12, 14, 15)$$

2°.- Se clasifican los maxterms por sus índices.

Índice 1	Índice 2	Índice 3	Índice 4
	9... 1 0 0 1	12... 1 1 0 0	15... 1 1 1 1
	12... 1 1 0 0	13... 1 1 0 1	

3°.- Se encuentran todas las adyacencias de orden 1 a partir de los maxterms.

Índice 2 con Índice 3	Índice 3 con Índice 4
9-13...1 - 0 1	13-15...1 1 - 1
12-13...1 1 0 -	14-15... 1 1 1 -

4°.- Se encuentran las adyacencias de orden 2

(Índice 2 con índice 3) con (Índice 3 con Índice 4)
(12-13)-(14-15)...1 1 - -

La función minimizada queda  $f = (x_1 + x_2)(x_1 + \bar{x}_3 + x_4)$

Ejemplo:

1°.- Se parte de la función expresada en forma canónica como suma de minterms.

$$f = \sum m(1, 2, 3, 4, 5, 6, 9, 10, 11, 14, 16, 17, 18, 20, 21, 24, 25)$$

2°.- Se clasifican los minterms por sus índices.

Índice 1	Índice 2	Índice 3
1... 0 0 0 0 1	3... 0 0 0 1 1	11... 0 1 1 1 1
1... 0 0 0 1 0	5... 0 0 1 0 1	14... 1 0 1 0 0
4... 0 0 1 0 0	6... 0 0 1 1 0	21... 0 1 1 1 1
16... 1 0 0 0 0	9... 0 1 0 0 1	25... 0 1 1 1 1
	10... 0 1 0 1 0	
	17... 1 0 0 0 1	
	18... 1 0 0 1 0	
	20... 1 0 1 0 0	
	24... 1 1 0 0 0	

3°.- Se encuentran todas las adyacencias de orden 1 a partir de los minterms. Para ello se comparan todos los minterms de un índice dado con todos los minterms cuyo índice es superior en una unidad.

Índice 1 con índice 2	Índice 2 con Índice 3
1-3.....0 0 0 - 1	3-11..... 0 - 0 1 1
1-5.....0 0 - 0 1	5-21..... - 0 1 0 1
1-9.....0 - 0 0 1	6-14..... 0 - 1 1 0
1-17..... - 0 0 0 1	9-11..... 0 1 0 - 1
2-3.....0 0 0 1 -	9-25..... - 1 0 0 1
2-6.....0 0 - 1 0	10-11..... 0 1 0 1 -
2-10.....0 - 0 1 0	10-14..... 0 1 - 1 0
2-18..... - 0 0 1 0	17-21..... 1 0 - 0 1
4-5.....0 0 1 0 -	17-25..... 1 - 0 0 1
4-6.....0 0 1 - 0	20-21..... 1 0 1 0 -
4-20..... - 0 1 0 0	24-25..... 1 1 0 0 -
16-17.....1 0 0 0 -	
16-18.....1 0 0 - 0	
16-20.....1 0 - 0 0	
16-24.....1 - 0 0 0	

4°.- procediendo de igual modo que en el paso anterior, comparando adyacencias de orden 1 se obtienen las adyacencias de orden 2.

(Índice 1 con índice 2) con (Índice 2 con Índice 3)
(1-3)-(9-11)... 0 - 0 - 1
(1-5)-(17-21)... 0 - 0 - 1
(1-9)-(17-25)... - - 0 0 1
(2-3)-(10-11)... 0 - 0 1 -
(2-6)-(10-14)... 0 - - 1 -
(4-5)-(20-21)... - 0 1 0 -
(16-17)-(20-21)... 1 0 - 0 -
(16-17)-(24-25)... 1 - 0 0 -

5°.- Selección de implicantes

0 - 0 - 1	1	2	3	4	5	6	9	10	11	14	16	17	18	20	21	24	25
- 0 - 0 1	x		x		x		x		x			x			x		
- - 0 0 1	x						x					x					x
0 - 0 1 -		x	x					x	x								
0 - - 1 0		x				x		x		x							
- 0 1 0 -				x	x									x	x		
1 0 - 0 -											x	x		x	x		
- 0 0 1 0		x											x				
1 0 0 - 1											x		x				

Buscamos las columnas en que sólo hay una x. Sus implicantes ha de ser cogidos forzosamente. Son las columnas 4, 6, 14 y 24. Los implicantes son  $(- 0 - 0 1)$ ,  $(0 - - 1 0)$  y  $(1 - 0 0 -)$ . Pero al coger estos implicantes, también resultan cubiertos los minterms 2, 5, 10, 16, 17, 20, 21 y 25. Sólo faltan por cubrir los minterms 1, 3, 9, 11 y 18.

Elegiendo el implicante  $(0 - 0 - 1)$  cubrimos los minterms 1, 3, 9 y 11. Ya sólo queda el 18, que no se recubre con ninguna de las adyacencias de orden 2. Párale debemos elegir uno de los dos implicantes del fondo de la tabla. Según el que se elija, se tendrá una de las dos representaciones siguientes:

$$f = \overline{x}_1 \overline{x}_3 \overline{x}_5 + \overline{x}_1 x_4 \overline{x}_5 + x_1 \overline{x}_3 \overline{x}_4 + \overline{x}_2 x_3 \overline{x}_4 + \overline{x}_2 \overline{x}_3 \overline{x}_4 \overline{x}_5$$

$$f = x_1 \overline{x}_3 x_5 + x_1 x_4 x_5 + x_1 \overline{x}_3 x_4 + x_2 x_3 x_4 + x_1 x_2 x_3 x_5$$

Ejemplo:

1°.- Se parte de la misma función, pero expresada en forma canónica como producto de maxterms.

$$f = \Sigma m(1, 2, 3, 4, 5, 6, 9, 10, 11, 14, 16, 17, 18, 20, 21, 24, 25)$$

$$f = \Pi M(0, 1, 2, 3, 4, 5, 8, 9, 12, 16, 18, 23, 24, 31)$$

2°.- Se clasifican los maxterms por sus índices.

Índice 0	Índice 1	Índice 2	Índice 3	Índice 4	Índice 5
0... 00000	1... 00001 2... 00010 4... 00100 8... 01000 16... 10000	3... 00011 5... 00101 9... 01001 12... 01100 18... 10010 24... 11000	19... 10011	23... 10111	31... 11111

3°.- Se encuentran todas las adyacencias de orden 1 a partir de los maxterms.

Índice 0 con índice 1	Índice 1 con Índice 2	Índice 2 con Índice 3	Índice 3 con Índice 4	Índice 4 con Índice 5
0-1... 0000- 0-2... 000-0 0-8... 0-000 0-16... -0000	1-3... 000-1 1-5... 00-01 1-9... 0-001 2-3... 0001- 2-18... -0010 4-5... 0010- 4-12... 0-100 8-9... 0100- 8-12... 01-00 8-24... -1000 16-18... 100-0 16-24... 1-000	3-19... -0011 18-19... 1001-	19-23... 10-11	23-31... 1-111

4°.- Se encuentran las adyacencias de orden 2

(Índice 0 con índice 1) con (Índice 1 con Índice 2)	(Índice 1 con índice 2) con (Índice 2 con Índice 3)
(0-1)-(2-3)... 000-- (0-1)-(8-9)... 0-00- (0-4)-(8-12)... 0--00 (0-16)-(8-24)... --000	(2-3)-(18-19)... -001-

5°.- Selección de implicantes

X <sub>1</sub> X <sub>2</sub> X <sub>3</sub> X <sub>4</sub> X <sub>5</sub>	0	1	2	3	4	5	8	9	12	16	18	19	23	24	31
0 0 0 - -	√	√	√	√											
0 0 - 0 -	√	√			√	√									
0 - 0 0 -	√	√					√	√							
- 0 0 - 0	√	√								√	√				
0 - - 0 0	√				√		√		√						
- - 0 0 0	√						√			√				√	
- 0 0 1 -			√	√							√	√			
1 - 1 1 1													√		√

Solución:  $f = (x_1 + x_3 + x_4 + x_5) (\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \bar{x}_4) (\bar{x}_1 + \bar{x}_3 + \bar{x}_4) (\bar{x}_1 + \bar{x}_4 + \bar{x}_3) (\bar{x}_3 + \bar{x}_4 + \bar{x}_5) (\bar{x}_2 + \bar{x}_3 + \bar{x}_4)$

Ejemplo:

1°.- Se parte de la función expresada en forma canónica como suma de minterms e indiferencias.

$$f = \sum m(1, 2, 3, 5, 7, 12, 15, 24, 25, 28) + \sum d(0, 13, 20, 27, 31)$$

El tratamiento de las indiferencias es el siguiente:

- En la obtención de los implicantes primos, como si fueran minterms.
- En la tabla de implicantes no deben aparecer.

2°.- Se clasifican los minterms por índices teniendo en cuenta si son potencias de 2 (índice 1), si son suma de dos potencias de 2 (índice 2), si son suma de tres potencias de 2 (índice 3), etc.

Índice 0	Índice 1	Índice 2	Índice 3	Índice 4	Índice 5
0	1	3	7	15	31
	2	5	13	27	
		12	25		
		20	28		
		24			

3°.- Se comparan pares de grupos contiguos comprobando si difieren en una potencia de 2 (adyacencia de primer orden), y se marcan en la tabla anterior los minterms cubiertos. Se coloca entre paréntesis la diferencia entre minterms.

Índice 0 con índice 1	Índice 1 con índice 2	Índice 2 con Índice 3	Índice 3 con Índice 4	Índice 4 con Índice 5
0-1 (1)	1-3 (2)	3-7 (4)	28-27 (1)	15-31 (16)
0-2 (2)	1-5 (4)	5-7 (2)	7-15 (8)	27-31 (4)
	2-3 (1)	5-13 (8)	13-15 (2)	
		12-13 (8)	25-27 (2)	
		12-28 (16)		
		20-28 (8)		
		24-25 (1)		
		24-28 (4)		

Los minterms que han sido usados en este paso, se señalan en la tabla del paso anterior.

Índice 0	Índice 1	Índice 2	Índice 3	Índice 4	Índice 5
0 ✓	1 ✓	3 ✓	7 ✓	15 ✓	31 ✓
	2 ✓	5 ✓	13 ✓	27 ✓	
		12 ✓	25 ✓		
		20 ✓	28 ✓		
		24 ✓			

4°.- Se obtienen las adyacencias de orden 2 comparando las adyacencias de un grupo con las del contiguo que tengan igual diferencia entre paréntesis. Se nota si son adyacentes observando si la diferencia minterm a minterm es una potencia de 2. Se coloca en este caso entre paréntesis el número anterior y la diferencia.

(Índice 0 con índice 1) con (Índice 1 con Índice 2)	(Índice 1 con índice 2) con (Índice 2 con Índice 3)	(Índice 2 con Índice 3) con (Índice 3 con Índice 4)
(0-1)-(2-3)	(1, 2)	(1-3)-(5-7) (2, 4)
		(5-7)-(13-15) (2, 8)

Los minterms que han sido usados en este paso, se señalan en la tabla del paso anterior.

Índice 0 con índice 1	Índice 1 con índice 2	Índice 2 con Índice 3	Índice 3 con Índice 4	Índice 4 con Índice 5
0-1 (1) ✓	1-3 (2) ✓	3-7 (4) ✓	7-15 (8) ✓	15-31 (16)
0-2 (2) ✓	1-5 (4) ✓	5-7 (2) ✓	13-15 (2) ✓	27-31 (4)
	2-3 (1) ✓	5-14 (8) ✓	25-27 (2)	
		12-13 (8)		
		12-28 (16)		
		20-28 (8)		
		24-25 (1)		
		24-28 (4)		

Este proceso se repite hasta que no se puedan obtener más adyacencias, como ha sucedido en el ejemplo. Ahora se nombra de atrás hacia delante las adyacencias y minterms que quedaron sin cubrir.

(Índice 0 con índice 1) con (Índice 1 con Índice 2)	(Índice 2 con índice 3) con (Índice 3 con Índice 4)	(Índice 3 con Índice 4) con (Índice 4 con Índice 5)
(0-1)-(2-3) (1, 2) (c)	(1-3)-(5-7) (2, 4) (b)	(5-7)-(13-15) (2, 8) (a)

Índice 0 con índice 1	Índice 1 con índice 2	Índice 2 con Índice 3	Índice 3 con Índice 4	Índice 4 con Índice 5
0-1 (1) ✓ 0-2 (2) ✓	1-3 (2) ✓ 1-5 (4) ✓ 2-3 (1) ✓	3-7 (4) ✓ 5-7 (2) ✓ 5-15 (8) ✓ 12-13 (8) (k) 12-28 (16) (j) 20-28 (8) (i) 24-25 (1) (h) 24-28 (4) (g)	7-15 (8) ✓ 13-15 (2) ✓ 25-27 (2) (f)	15-31 (16) (e) 27-31 (4) (d)

5°.- Selección de implicantes. Como decíamos, en la tabla de implicantes no se deben recoger las indiferencias.

	1	2	3	5	7	12	15	24	25	28
(a)				✓	✓		✓			
(b)	✓		✓	✓	✓					
(c)	✓	✓	✓							
(d)	(d) está implicado sólo por indiferencias									
(e)							✓			
(f)									✓	
(g)								✓	✓	✓
(h)								✓	✓	
(i)										✓
(j)						✓				✓
(k)						✓				

Sólo *c* es implicante primo esencial. Elijiéndolo, ya tenemos cubiertos los minterms 1, 2 y 3.

	5	7	12	15	24	25	28
(a)	✓	✓		✓			
(b)	✓	✓					
(e)				✓			
(f)						✓	
(g)					✓		✓
(h)					✓	✓	
(i)							✓
(j)			✓				✓
(k)			✓				

El implicante *a* domina a los implicantes *b* y *e*.

El implicante *h* domina al implicante *f*.

El implicante *g* domina al implicante *i*.

El implicante *j* domina al implicante *k*.

Eliminado los implicantes dominados, nos queda esta tabla:

	5	7	12	15	24	25	28
(a)	✓	✓		✓			
(g)					✓		✓
(h)					✓	✓	
(j)			✓				✓

Resultan ser implicantes primos secundarios *a*, *h* y *j*. Con ellos quedan ya recogidos todos los minterms.

$$f = \sum \text{implicantes}(c, a, h, j) = (000-- ) + (0-1-1) + (1100-) + (-1100) = \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 + \bar{x}_1 x_3 x_5 + x_1 x_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 + x_2 x_3 \bar{x}_4 \bar{x}_5$$

#### 4 TÉCNICA DE SELECCIÓN DE PETRICK

Al minimizar según el método de Quine-McCluskey, en ocasiones se llega a tablas reducidas en las que ya no se pueden encontrar implicantes primos esenciales secundarios, ni relaciones de dominancia. Como ejemplo consideremos la siguiente tabla reducida:

	6	7	15	38	46	47
(a)	√	√				
(b)			√			√
(c)		√	√			
(d)					√	√
(e)				√	√	
(f)	√			√		

En estos casos se utiliza la técnica de Petrick para hacer la selección final de implicantes primos. Consiste en considerar cada implicante primo de la tabla reducida como una variable binaria que toma el valor 1 si se selecciona el implicante; y 0 en caso contrario. A continuación, con esas variables binarias se construye una función lógica del siguiente modo: para cada minterm consideramos todos los implicantes que lo cubren y sumamos sus variables binarias asociadas, construyendo luego la función producto de todas estas sumas:

$$g = (a + f)(a + c)(b + c)(e + f)(d + e)(b + d)$$

Es necesario que todas las sumas valgan 1 para que  $g$  valga 1. Esto se consigue seleccionando uno o varios de los implicantes que constituyen cada suma.

Desarrollamos  $g$ :

$$g = (a + ac + af + fc)(b + bd + cb + cd)(e + ed + ef + fd)$$

Teniendo en cuenta:

$$\begin{aligned} a \cdot f &= 0 \\ a \cdot c &= 0 \\ b \cdot c &= 0 \\ e \cdot f &= 0 \\ d \cdot e &= 0 \\ b \cdot d &= 0 \end{aligned}$$

$$g = (a + fc)(b + cd)(e + fd) = (ab + acd + fcb + fcd)(e + fd) = abe + abfd + acde + acdf + fcbe + fcbd + fcde + fcd$$

volviendo a tener en cuenta que algunos productos son nulos:

$$g = abe + cdf + abdf + acde + bcef$$

Para que  $g$  valga 1 basta que uno sólo de estos productos valga 1, lo que se verifica seleccionando los implicantes primos correspondientes. Elegimos entre los más económicos:  $abe$  y  $cdf$ . De estos dos términos, el primero contiene más implicantes de mayor orden ( $a$  y  $b$ ) y, por tanto, se eligen los implicantes  $a$ ,  $b$  y  $e$  para terminar de cubrir la función.

Ejemplo:

Minimizar la función.

$$f = \sum m(0, 1, 3, 4, 7, 13, 15, 19, 20, 22, 23, 29, 31)$$

Índice 0	Índice 1	Índice 2	Índice 3	Índice 4	Índice 5
0 ✓	1 ✓ 4 ✓	3 ✓ 20 ✓	7 ✓ 13 ✓ 19 ✓ 22 ✓	15 ✓ 23 ✓ 29 ✓	31 ✓

Índice 0 con índice 1	Índice 1 con índice 2	Índice 2 con Índice 3	Índice 3 con Índice 4	Índice 4 con Índice 5
0-1 (1) (i) 0-4 (4) (h)	1-3 (2) (g) 4-20 (16) (f)	3-7 (4) ✓ 3-19 (16) ✓ 20-22 (2) (e)	7-15 (8) ✓ 7-23 (16) ✓ 13-15 (2) ✓ 13-29 (16) ✓ 19-23 (4) ✓ 22-23 (1) (d)	15-31 (16) ✓ 23-31 (8) ✓ 29-31 (2) ✓

(Índice 2 con índice 3) con (Índice 3 con Índice 4)	(Índice 3 con índice 4) con (Índice 4 con Índice 5)
(3-7)-(19-23) (4, 16) (c)	(7-15)-(23-31) (8, 16) (b) (13-15)-(29-31) (2, 16) (a)

	0	1	3	4	7	13	15	19	20	22	23	29	31
(a)						✓	✓						
(b)					✓	✓					✓		✓
(c)			✓		✓			✓			✓		
(d)									✓	✓			
(e)									✓	✓			
(f)				✓					✓				
(g)		✓	✓										
(h)	✓			✓									
(i)	✓	✓											

	0	1	4	20	22
(b)					
(d)					✓
(e)				✓	✓
(f)			✓	✓	
(g)		✓			
(h)	✓		✓		
(i)	✓	✓			

	0	1	4	20	22
(d)					✓
(e)				✓	✓
(f)			✓	✓	
(g)		✓			
(h)	✓		✓		
(i)	✓	✓			

Ahora, en lugar de reducir buscando dominancias, se puede aplicar directamente la técnica de Petrick:

$$g = (h + i) (g + i) (f + h) (e + f) (d + e) = (hg + hi + ig + i) (fe + f + he + hf) (d + e)$$

Teniendo en cuenta:

$$h \cdot i = 0$$

$$i \cdot g = 0$$

$$f \cdot i = 0$$

$$f \cdot e = 0$$

$$h \cdot f = 0$$

$$g = (hg + i) (he + f) (d + e) = (hg + i) (hed + he + fd + fe) = (hg + i) (he + fd + fe) = egh + dfgh + efgh + ehi + dfi + efi$$

$$\text{Teniendo en cuenta: } egh + efgh = egh$$

$$g = dfgh + egh + ehi + dfi + efi$$

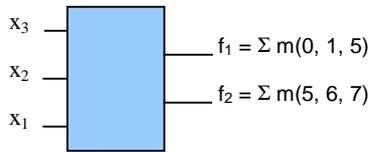
Cualquiera de los productos de tres implicantes primos sirve en esta caso, pues todos los implicantes son del mismo orden. Si por ejemplo tomamos  $efi$ :

$$f = \sum \text{implicantes}(a, c, e, f, i) = x_2 x_3 x_5 + \bar{x}_2 x_4 x_5 + x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \bar{x}_5 + \bar{x}_2 x_3 \bar{x}_4 \bar{x}_5 + \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4$$

## 5 SIMPLIFICACIÓN MULTIFUNCIONAL

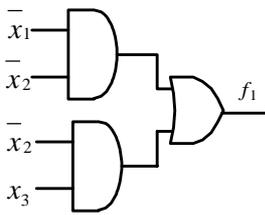
Es frecuente que un sistema digital, además de varias entradas ( $x_1, x_2, \dots, x_n$ ) tenga más de una salida ( $y_1, y_2, \dots, y_n$ ), lo que exige implementar varias funciones digitales. En lugar de minimizar cada una por separado es más eficaz intentar minimizarlas simultáneamente buscando implicantes primos que sean comunes, ya que a menudo se pueden obtener ahorros considerables compartiendo los elementos lógicos entre varias funciones. Esto puede verse más claramente con un ejemplo.

Ejemplo. Supongamos que han de implementarse simultáneamente estas dos funciones digitales:



Las implementaciones mínimas (con un total de seis puertas) son:

$x_1 \backslash x_2 x_3$	00	01	11	10
0	1	1		
1		1		



$x_1 \backslash x_2 x_3$	00	01	11	10
0				
1		1	1	1

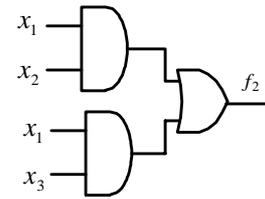


Fig 2. Implementación de las funciones del ejemplo.

Sin embargo, si transformamos las expresiones utilizando el minterm común entre ambas funciones:

$$f_1 = \bar{x}_1 \bar{x}_2 + x_1 \bar{x}_2 x_3 \quad f_2 = x_1 x_2 + x_1 \bar{x}_2 x_3$$

Aprovechando el término común, la implementación completa queda como se ilustra en la figura 3, con sólo cinco puertas en lugar de las seis necesitadas en las implementaciones mínimas por separado.

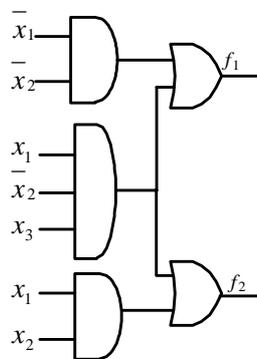


Fig 3. Implementación mínima de las funciones del ejemplo.

El método de simplificación multifuncional está basado en el método de Quine-McCluskey y lo estudiaremos mediante un ejemplo.

Ejemplo. Minimización simultánea de las funciones:

$$f\alpha = \Sigma m(2, 4, 10, 11, 12, 13)$$

$$f\beta = \Sigma m(4, 5, 10, 11, 13)$$

$$f\gamma = \Sigma m(1, 2, 3, 10, 11, 12)$$

En primer lugar se ordenan los minterms por índices como si todos formaran parte de una misma función, pero señalando a qué función pertenecen.

Índice 1	Índice 2	Índice 3
1.....( $\gamma$ ) ✓	3.....( $\gamma$ ) ✓	11....( $\alpha, \beta, \gamma$ ) ✓
2....( $\alpha, \gamma$ ) ✓	5.....( $\beta$ ) ✓	13....( $\alpha, \beta$ ) (k)
4...( $\alpha, \beta$ ) (i)	10....( $\alpha, \beta, \gamma$ ) ✓	
	12.....( $\alpha, \gamma$ ) (j)	

A continuación se comparan los minterms de grupos contiguos, mirando si forman adyacencias los pertenecientes a una misma función y marcando los minterms cubiertos en todas las funciones a las que pertenecen.

se tachan

Índice1 con índice 2	Índice 2 con Índice 3
1-3.....(2) .....( $\gamma$ ) (f)	3-11.....(8) .....( $\gamma$ ) ✓
2-3.....(1) .....( $\gamma$ ) ✓	5-13.....(8) .....( $\beta$ ) (e)
2-10.....(8) ..( $\alpha, \gamma$ ) (g)	10-11.....(1) ..( $\alpha, \beta, \gamma$ ) (h)
4-5.....(1) .....( $\beta$ ) (d)	12-13.....(1) .....( $\alpha$ ) (c)
4-12.....(8) .....( $\alpha$ ) (b)	

no se tachan pues, además de en  $\gamma$ , también están en otras funciones; y las puertas que producen estas salidas pueden ponerse como comunes a dichas funciones.

(Índice 1 con índice 2) con (Índice 2 con Índice 3)
(2-3)-(10-11).....(1, 8) ..( $\gamma$ ) (a)

A partir de aquí, el tratamiento es prácticamente por separado para las tres funciones. Construimos una tabla de implicantes primos, separando los minterms por funciones; y agrupando los implicantes también por funciones.

		f $\alpha$						f $\beta$					f $\gamma$					
		2	4	10	11	12	13	4	5	10	11	13	1	2	3	10	11	12
$\alpha$	(b)		✓			✓												
	(c)					✓	✓											
$\beta$	(d)							✓	✓									
	(e)								✓			✓						
$\gamma$	(a)												✓	✓	✓	✓	✓	✓
	(f)												✓					
$\alpha, \beta$	(i)		✓					✓										
	(k)						✓					✓						
$\alpha, \gamma$	(g) <sub><math>\alpha</math></sub>		✓		✓									✓		✓		
	(j) <sub><math>\gamma</math></sub>					✓												✓
$\alpha, \beta, \gamma$	(h) <sub><math>\alpha, \beta</math></sub>			✓	✓					✓	✓					✓	✓	

A continuación se separan los implicantes primos esenciales para cada función; y se construye la tabla reducida.

		f $\alpha$		f $\beta$		
		4	13	4	5	13
$\alpha$	(b)	✓				
	(c)		✓			
$\beta$	(d)			✓	✓	
	(e)				✓	✓
$\alpha, \beta$	(i)	✓		✓		
	(k)		✓			✓

Como no quedan claras las relaciones de dominio (que se deben tomar sobre toda la tabla), recurrimos a la técnica de selección de Petrick. Al igual que en el caso de una función se desarrolla un producto de sumas, en donde cada suma incluye la lista de los implicantes primos disponibles para cubrir uno de los minterms que no quedan cubiertos por los implicantes esenciales para todas las funciones:

$$(b + i)(c + k)(d + i)(d + e)(e + k) = 1$$

Realizando operaciones:

$$(bd + bi + id + i)(d + e)(ce + ck + ke + k) = cei + bcde + eik + dik + bdk = 1$$

Cada producto representa un conjunto suficiente de implicantes primos para cubrir los minterms restantes. Puesto que cada literal representa un implicante, sólo se toman en cuenta los productos con menos literales y, entre ellos, los que contengan más adyacencias de más alto orden. Quedan:  $cei$  y  $bdk$ , donde arbitrariamente elegimos el primero.

De acuerdo con el conjunto total de implicantes primos seleccionados:  $c, e, f, g, h, i$  y  $j$ , ahora se determinan los que se requieran para cada función. Si un implicante primo aparece sólo en una función, es evidente que debe seleccionarse en ella. Para implicantes primos de más de una función se debe tener más cuidado. Por ejemplo,  $j$ , que es esencial para  $f\gamma$ , no lo es para  $f\alpha$ , al estar cubierto por  $c$ , por lo que sería redundante. Basándonos en estas consideraciones, se puede hacer la siguiente selección de implicantes para las tres funciones:

$$f\alpha = c + g + h + i$$

$$f\beta = e + h + i$$

$$f\gamma = f + g + h + j$$

es decir:

$$f\alpha = x_1 x_2 \bar{x}_3 + \bar{x}_2 x_3 \bar{x}_4 + x_1 \bar{x}_2 x_3 + \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4$$

$$f\beta = x_1 \bar{x}_2 x_3 + x_2 \bar{x}_3 x_4 + \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4$$

$$f\gamma = \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_4 + \bar{x}_2 x_3 \bar{x}_4 + x_1 \bar{x}_2 x_3 + x_1 x_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4$$

Esta implementación se resuelve con diez puertas lógicas.