ESTRUCTURA Y TECNOLOGÍA DE LOS COMPUTADORES I

TEMA 4

Algebra booleana y puertas lógicas

TEMA 4. Algebra booleana y puertas lógicas

- 4.1 Definición de álgebra de Boole
- 4.2 Teoremas del álgebra de Boole
- 4.3 Álgebra de Boole bivalente
- 4.4 Funciones lógicas básicas
- 4.5 Simplificación de funciones lógicas

4.1. DEFINICIÓN DE ÁLGEBRA DE BOOLE

- Una estructura matemática, se construye a partir de:
  - Un **conjunto de elementos** sobre los que se definen **unos operadores** que permiten realizar operaciones en ellos, y
  - Estableciendo **unos postulados o axiomas** que relacionan tanto al conjunto de elementos como al conjunto de operadores.

Algebra de Boole
(postulados de Huntington)

- Se parte de una estructura algebraica (B, +, ·), formada por:
  - Un conjunto de elementos ***B*** y
  - Dos operaciones definidas en el mismo, denominadas + y · (suma y producto).
- Se dice que es un álgebra de Boole si cumple los siguientes axiomas, también conocidos como **postulados de Huntington**.

Postulados de Huntington (I)

Postulado I. El conjunto ***B*** **es cerrado con respecto a las dos operaciones.**

Es decir, se cumple que $\forall\ a, b \in B$:

$$a + b \in B$$
$$a \cdot b \in B \qquad [4.1]$$

Postulado II. Existe un **elemento identidad** en las dos operaciones.

En la operación + el elemento identidad es el 0 y en la operación $\cdot$ es el 1, cumpliéndose que $\forall\ a \in B$:

$$a + 0 = a$$
$$a \cdot 1 = a \qquad [4.2]$$

Postulado III. Las dos operaciones cumplen la **propiedad conmutativa**.

Es decir, se cumple que $\forall\ a, b \in B$:

$$a + b = b + a$$
$$a \cdot b = b \cdot a \qquad [4.3]$$

Postulados de Huntington (II)

Postulado IV. Cada operación es **distributiva** con respecto a la otra.

Es decir, se cumple que $\forall\ a, b, c \in B$:

$$a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$$
$$a + (b \cdot c) = (a + b) \cdot (a + c) \qquad [4.4]$$

Postulado V. Existe un **elemento complementario**.

Se cumple que $\forall\ a \in B$ existe otro elemento de B llamado "complementario de a" que se representa por $\overline{a}$ (la línea horizontal indica **complemento** o **negación** de a), siendo:

$$a + \overline{a} = 1$$
$$a \cdot \overline{a} = 0 \qquad [4.5]$$

Postulado VI. Número de elementos.

En el conjunto B existen al menos dos elementos diferentes, cumpliéndose que $\forall\ a, b \in B$:

$$a \neq b \qquad [4.6]$$

4.2. TEOREMAS DEL ÁLGEBRA DE BOOLE

- **Principio de Dualidad**
  - Es consecuencia de la simetría de los postulados con respecto a:
    - Las dos operaciones + y ·, y
    - A los dos elementos de identidad 0 y 1.
- Cada axioma se define doblemente mediante dos expresiones duales
  - Para la operación + y para la operación *

Ley de idempotencia. Para cualquier elemento a en un álgebra de Boole, se verifica que:

$$a + a = a$$

$$a \cdot a = a \qquad \text{(identidad dual)} \qquad [4.7]$$

Operaciones con elementos identidad. Para cualquier elemento a en un álgebra de Boole, se cumple que:

$$a + 1 = 1$$

$$a \cdot 0 = 0 \qquad \text{(identidad dual)} \qquad [4.8]$$

Ley de involución. Para todo elemento a en un álgebra de Boole, se verifica:

$$\overline{\overline{a}} = a \qquad [4.9]$$

Ley de absorción. Para cada par de elementos a y b de un álgebra de Boole se verifica que:

$$a + a \cdot b = a$$

$$a \cdot (a + b) = a \qquad \text{(identidad dual)} \qquad [4.10]$$

En el álgebra de Boole se verifica que:

$$a + (\overline{a} \cdot b) = a + b$$
$$a \cdot (\overline{a} + b) = a \cdot b \qquad \text{(identidad dual)} \qquad [4.11]$$

En un álgebra de Boole las **operaciones + y · son asociativas**. Para toda terna de elementos a, b y c se verifica que:

$$a + (b + c) = (a + b) + c$$
$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c \qquad \text{(identidad dual)} \qquad [4.12]$$

Leyes de De Morgan. En un álgebra de Boole se verifica que:

$$\overline{a + b + c + d + \ldots} = \overline{a} \cdot \overline{b} \cdot \overline{c} \cdot \overline{d} \cdot \ldots$$
$$\overline{a \cdot b \cdot c \cdot d \cdot \ldots} = \overline{a} + \overline{b} + \overline{c} + \overline{d} + \ldots \qquad \text{(identidad dual)} \qquad [4.13]$$

Teorema. El complemento de una función se obtiene intercambiando las operaciones + y ·, y reemplazando cada variable por su complementario.

$$\overline{f(a, b, c, d, +, \cdot)} = f(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}, \overline{d}, \cdot, +) \qquad [4.14]$$

Leyes de Morgan

$$Leyes \ldots de \ldots Morgan \longrightarrow \overline{a+b} = \overline{a} \bullet \overline{b}$$

$$\overline{a \bullet b} = \overline{a} + \overline{b}$$

a	b	$F=\overline{a+b}$	$\overline{a}$	$\overline{b}$	$F=\overline{a}\bullet\overline{b}$	$F=\overline{a\bullet b}$	$F=\overline{a}+\overline{b}$
0	0	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	0	1	1
1	0	0	0	1	0	1	1
1	1	0	0	0	0	0	0

$$Teorema \ldots de \ldots Shannon \longrightarrow F = f(a,b,c) = a \bullet f(1,b,c) + \overline{a} \bullet f(0,b,c)$$

$$F = bc \Rightarrow F = abc + \overline{a}bc$$

4.3. ÁLGEBRA DE BOOLE BIVALENTE

- Dependiendo del conjunto *B* elegido y de cómo se especifiquen las operaciones + y · se pueden definir numerosas álgebras de Boole.
- Denominada así por estar definida sobre un conjunto con dos elementos ***B* = {0, 1}** y las **operaciones suma lógica +** y **producto lógico ·**,
  - Cumple con los postulados
  - Se demuestran por inducción perfecta

Tabla 4.1. Definición de las operaciones suma lógica + y producto lógico $\cdot$.

$a\ b$	$a + b$	$a \cdot b$
0 0	0	0
0 1	1	0
1 0	1	0
1 1	1	1

Tabla 4.2. Complemento lógico.

a	$\overline{a}$
0	1
1	0

Tabla 4.3. Comprobación de la ley distributiva del producto lógico · sobre la suma lógica +.

$a\ b\ c$	$b + c$	$a \cdot (b + c)$	$a \cdot b$	$a \cdot c$	$(a \cdot b) + (a \cdot c)$
0 0 0	0	0	0	0	0
0 0 1	1	0	0	0	0
0 1 0	1	0	0	0	0
0 1 1	1	0	0	0	0
1 0 0	0	0	0	0	0
1 0 1	1	1	0	1	1
1 1 0	1	1	1	0	1
1 1 1	1	1	1	1	1

Tabla 4.4. Comprobación de que el álgebra bivalente cumple el postulado quinto.

a	$\overline{a}$	$a + \overline{a}$	$a \cdot \overline{a}$
0	1	1	0
1	0	1	0

4.3.1. Variables y funciones lógicas

- **Variable Lógica:**
  - Un símbolo, que representa a cualquiera de los elementos de un conjunto *B*
    - **Variable binaria**: puede tomar los valores 0 y 1
- **Función lógica** *f*
  - Es una función booleana definida en B^n, cuya imagen pertenece al conjunto $B = \{0, 1\}$, siendo su valor igual al de una expresión algebraica de variables lógicas unidas mediante las operaciones de suma lógica +, producto lógico · y el operador complemento.

Algunas expresiones de funciones lógicas son las siguientes:

$$f_1 = f_1(b, a) = b\,a + b\,\overline{a}$$

$$f_2 = f_2(c, b, a) = c\,b + a$$

$$f_3 = f_3(c, b, a) = b\,a + c\,b\,\overline{a} + \overline{b}\,a + a$$

$$f_4 = f_4(c, b, a) = (b + a)(c + b + \overline{a})(\overline{b} + a)$$

$$f_5 = f_5(e, d, c, b, a) = \overline{e}\,b\,a + \overline{d}\,c\,b\,\overline{a} + \overline{b}$$

El **valor de una función** se determina sustituyendo las variables por sus valores en la expresión algebraica y aplicando las reglas definidas para las operaciones + y ·.

Ejemplo:

La función f_3 es la siguiente:

$$f_3 = f_3(c, b, a) = b\,a + c\,b\,\overline{a} + \overline{b}\,a + a$$

Sustituyendo en la expresión algebraica f_3 las variables por sus valores ($a = 1$, $b = 0$ y $c = 1$), se obtiene el resultado de la función:

$$f_3 = f_3(1{,}0{,}1) = 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 \cdot \overline{1} + \overline{0} \cdot 1 + 1 = 0 + 0 + 1 + 1 = 1$$

4.3.2. Representación de las funciones lógicas mediante tablas de verdad

- TABLA DE LA VERDAD:
  - Tabla que recoge todas las combinaciones de las variables de entrada y los valores que toman las salidas.

$c\ b\ a$	f_3
0 0 0	0
0 0 1	1
0 1 0	0
0 1 1	1
1 0 0	0
1 0 1	1
1 1 0	1
1 1 1	1

4.3.3. Representación de las funciones lógicas en su forma canónica

- Una función lógica se puede representar como:
  - Suma de productos

$$f_3 = f_3(c, b, a) = b\,a + c\,b\,\overline{a} + \overline{b}\,a + a$$

  - Producto de sumas

$$f_4 = f_4(c, b, a) = (b + a)(c + b + \overline{a})(\overline{b} + a)$$

- Término Canónico de una función lógica
  - A todo producto o suma en el que aparecen todas las variables en su forma directa a o complementada a’ .

Formas Canónicas

- **Función Canónica**.
  - Función formada, exclusivamente, por términos de sumas canónicas o bien de productos canónicos
- Formas canónicas
  - 1ª Forma Canónica (minitérminos – minterm m_i)
    - Suma de productos de TODAS las variables
  - 2ª Forma Canónica (maxitérminos – maxterm – M_i)
    - Productos de sumas canónicas (todas las variables)

Expresión de términos mínimos

- Se utilizan para expresar de una forma "sencilla" las funciones lógicas
- 1º Forma canónica términos mínimos
  - Cada producto se denomina m_i siendo i el valor decimal de la combinación binaria que se obtiene al sustituir:
    - Por 1 las variables que, en el producto, aparecen de forma natural (directa),
    - Por cero las variables que aparecen en forma complementaria

Ejemplo:

- Sea f(abc)=

ab’c +a’bc + abc’ + a’b’c’

101 011 110 000

m_5 m_3 m_6 m_0

Expresión en términos máximos

- Se representa por M_i (producto de sumas), teniendo los subíndices el mismo significado
- F(abc)=

  (a'+b+c'). (a+b'+c).(a+b+c)

  0 1 0   1 0 1   1 1 1

  M_2 M_5 M_7

Tabla 4.6. Tabla de minterms y maxterms para una función de tres variables.

Decimal	*c b a*	*Minterms*		*Maxterms*	
0	0 0 0	$\bar{c}\,\bar{b}\,\bar{a}$	m_0	$c+b+a$	M_7
1	0 0 1	$\bar{c}\,\bar{b}\,a$	m_1	$c+b+\bar{a}$	M_6
2	0 1 0	$\bar{c}\,b\,\bar{a}$	m_2	$c+\bar{b}+a$	M_5
3	0 1 1	$\bar{c}\,b\,a$	m_3	$c+\bar{b}+\bar{a}$	M_4
4	1 0 0	$c\,\bar{b}\,\bar{a}$	m_4	$\bar{c}+b+a$	M_3
5	1 0 1	$c\,\bar{b}\,a$	m_5	$\bar{c}+b+\bar{a}$	M_2
6	1 1 0	$c\,b\,\bar{a}$	m_6	$\bar{c}+\bar{b}+a$	M_1
7	1 1 1	$c\,b\,a$	m_7	$\bar{c}+\bar{b}+\bar{a}$	M_0

4.3.4. Obtención de la función canónica a partir de la tabla de verdad. Teorema de Expansión

- Minterms:
  - Se toman las salidas que son “1” y se expresa como suma de términos producto en los que:
    - Las variables que son “1” se expresan como literales (forma directa) y
    - Las que son “0” como invertidas (complementario).

Término maxterm	Término minterm	a	b	c	F
7	0	0	0	0	0
6	1	0	0	1	1
5	2	0	1	0	1
4	3	0	1	1	0
3	4	1	0	0	0
2	5	1	0	1	1
1	6	1	1	0	1
0	7	1	1	1	1

$$F(a,b,c) = \overline{a}\overline{b}c + \overline{a}b\overline{c} + a\overline{b}c + ab\overline{c} + abc \quad \Rightarrow$$

$$F(a,b,c) = m_1 + m_2 + m_5 + m_6 + m_7 = \sum m(1,2,5,6,7)$$

Maxterms

- Se toman las salidas que son “0” y se expresa como producto de términos suma en los que
  - Las variables que son “0” se expresan como literales (forma directa) y
  - Las que son “1” como invertidas (complementario).

Término maxterm	Término minterm	a	b	c	F
7	0	0	0	0	0
6	1	0	0	1	1
5	2	0	1	0	1
4	3	0	1	1	0
3	4	1	0	0	0
2	5	1	0	1	1
1	6	1	1	0	1
0	7	1	1	1	1

$$F(a,b,c) = (a+b+c)(a+\overline{b}+\overline{c})(\overline{a}+b+c) \quad \Rightarrow$$

$$F(a,b,c) = M7 \cdot M4 \cdot M3 = \prod M(3,4,7)$$

4.3.5. Conversión entre expresiones canónicas en minterms y Maxterms

- **Paso de la 1ª forma canónica a la 2ª forma canónica:**
  - 1. Se representa la función invertida, tomando los términos minterm que **no aparecen**.
  - 2. Se hace la inversa de la función aplicando Morgan a los términos canónicos.
  - **3.** Se obtiene el complemento a 2^n-1 de cada uno de los términos. Siendo n el número de variables

$$F(a,b,c) = m_1 + m_2 + m_5 + m_6 + m_7 = \sum m(1,2,5,6,7)$$

1. $\overline{F(a,b,c)} = m_0 + m_3 + m_4 = \sum m(0,3,4)$

2. $F(a,b,c) = \overline{m_0 + m_3 + m_4} = \overline{\sum m(0,3,4)} \Rightarrow F(a,b,c) = \overline{m_0} \cdot \overline{m_3} \cdot \overline{m_4}$

3. $F(a,b,c) = M_7 \cdot M_4 \cdot M_3$

Paso de la 2ª forma canónica a la 1ª forma canónica

- 1. Se representa la función invertida, tomando los términos maxterm que no aparecen.
- 2. Se hace la inversa de la función aplicando Morgan a los términos canónicos.
- 3. Se obtiene el complemento a 2^n-1 de cada uno de los términos. Siendo n el número de variables

$$F(a,b,c) = M7 \cdot M4 \cdot M3 = \prod M(3,4,7)$$

1. $\overline{F(a,b,c)} = M_0 \cdot M_1 \cdot M_2 \cdot M_5 \cdot M_6 = \prod M(0,1,2,5,6)$

2. $F(a,b,c) = \overline{M_0 \cdot M_1 \cdot M_2 \cdot M_5 \cdot M_6} = \overline{\prod M(0,1,2,5,6)} \Rightarrow$

$$F(a,b,c) = \overline{M_0} + \overline{M_1} + \overline{M_2} + \overline{M_5} + \overline{M_6}$$

3. $F(a,b,c) = m_7 + m_6 + m_5 + m_2 + m_1$

4.3.6. Conversión de expresiones normalizadas a canónicas

- Las expresiones normalizadas
  - Son aquellas en las que **no** todos sus términos son canónicos y están únicamente formadas por suma de productos o por producto de sumas.

Son funciones normalizadas,

$$f_1(c,b,a)=c\,b+\bar{c}\,b\,\bar{a}$$
$$f_2(c,b,a)=(c+b)(\bar{c}+b+\bar{a})$$

sin embargo no es normalizada,

$$f_3(c,b,a)=c\left(b+\bar{b}\,a\right)+\bar{b}$$

pudiéndose normalizar si se opera sobre ella (desarrollando sus paréntesis),

$$f_3(c,b,a)=c\left(b+\bar{b}\,a\right)+\bar{b}=c\,b+c\,\bar{b}\,a+\bar{b}$$

Para convertir una expresión normalizada a canónica

- a) En el caso de suma de productos,
  - Se multiplica cada término producto no canónico por la variable que falta más ella misma negada.
  - Multiplicamos por uno (a + a’) = 1
- b) En el caso de producto de sumas
  - Se suma en cada factor no canónico la variable que falta por ella misma negada.
  - Sumamos cero (a.a’) = 0
- En ambos casos, el proceso se repite por cada variable que falte en cada término.

La conversión de la función normalizada f_3, del ejemplo anterior, a expresión canónica se realiza del siguiente modo:

$$f_3(c,b,a) = cb + c\,\overline{b}\,a + \overline{b} = cb(a+\overline{a}) + c\,\overline{b}\,a + \overline{b}\,(c+\overline{c})(a+\overline{a}) =$$

$$= cba + cb\overline{a} + c\overline{b}a + c\overline{b}a + c\overline{b}\,\overline{a} + \overline{c}\,\overline{b}a + \overline{c}\,\overline{b}\,\overline{a} =$$

$$= cba + cb\overline{a} + c\overline{b}a + c\overline{b}\,\overline{a} + \overline{c}\,\overline{b}a + \overline{c}\,\overline{b}\,\overline{a} = \sum_3 (0,1,4,5,6,7)$$

4.3.7. Conjunto de funciones de dos variables

Tabla 4.7. Tabla de verdad de las dieciséis funciones distintas que se pueden formar con dos variables.

b a	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}
0 0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
0 1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1 0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1 1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1

Tabla 4.8. Tabla resumen de las dieciséis funciones distintas que se pueden formar con dos variables.

FUNCIÓN	NOMBRE	OPERADOR	OBSERVACIÓN
$f_0 = 0$	Nula		Constate binaria 0
$f_1 = \bar{b}\,\bar{a} = \overline{b + a}$	NOR	$\overline{b + a}$	No OR
$f_2 = \bar{b}\,a$	Inhibición	a/b	a pero no b
$f_3 = \bar{b}$	Complemento	$\bar{b}$	No b
$f_4 = b\,\bar{a}$	Inhibición	b/a	b pero no a
$f_5 = \bar{a}$	Complemento	$\bar{a}$	No a
$f_6 = \bar{b}\,a + b\,\bar{a}$	OR exclusiva	$b \oplus a$	b distinta de a
$f_7 = \bar{b} + \bar{a} = b\,a$	NAND	$\overline{b \cdot a}$	No AND
$f_8 = b\,a$	AND	$b \cdot a$	b y a
$f_9 = \bar{b}\,\bar{a} + b\,a$	Equivalencia	$b \odot a$	b igual a a
$f_{10} = a$	Transferencia		a
$f_{11} = \bar{b} + a$	Implicación	$b \Rightarrow a$	Si b entonces a
$f_{12} = b$	Transferencia		b
$f_{13} = b + \bar{a}$	Implicación	$a \Rightarrow b$	Si a entonces b
$f_{14} = b + a$	OR	$b + a$	b ó a
$f_{15} = 1$	Identidad		Constate binaria 1

4.3.8. Función incompletamente definida

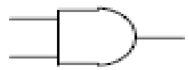
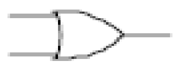
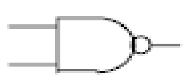
- Se define una **función incompletamente definida o función incompleta** como aquella que puede tomar indistintamente el valor 0 ó 1 para una o más combinaciones de sus variables de entrada, también llamadas **términos indiferentes** o **indiferencias**

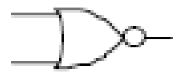
$c\ b\ a$	f_3
0 0 0	X
0 0 1	1
0 1 0	1
0 1 1	0
1 0 0	1
1 0 1	X
1 1 0	0
1 1 1	1

$$f_1(c,b,a)=\sum_3(1,2,4,7)+X(0,5)$$

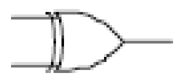
$$f_1(c,b,a)=\prod_3(1,4)\cdot X(2,7)$$

4.4. FUNCIONES LÓGICAS BÁSICAS

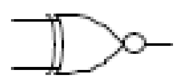
<table>
<tr>
<td>AND (Y)</td>
<td>$F = a \bullet b$</td>
<td></td>
<td>
<table>
<tr><th>a</th><th>b</th><th>$F = a \bullet b$</th></tr>
<tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr>
<tr><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr>
<tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr>
<tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr>
</table>
</td>
</tr>
<tr>
<td>OR (O)</td>
<td>$F = a + b$</td>
<td></td>
<td>
<table>
<tr><th>a</th><th>b</th><th>$F = a + b$</th></tr>
<tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr>
<tr><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr>
<tr><td>1</td><td>0</td><td>1</td></tr>
<tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr>
</table>
</td>
</tr>
<tr>
<td>INVER</td>
<td>$F = \overline{a}$</td>
<td></td>
<td>
<table>
<tr><th>a</th><th>$F = \overline{a}$</th></tr>
<tr><td>0</td><td>1</td></tr>
<tr><td>1</td><td>0</td></tr>
</table>
</td>
</tr>
<tr>
<td>NAND</td>
<td>$F = \overline{a \bullet b}$</td>
<td></td>
<td>
<table>
<tr><th>a</th><th>b</th><th>$F = \overline{a \bullet b}$</th></tr>
<tr><td>0</td><td>0</td><td>1</td></tr>
<tr><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr>
<tr><td>1</td><td>0</td><td>1</td></tr>
<tr><td>1</td><td>1</td><td>0</td></tr>
</table>
</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>NOR</td>
<td>$F = \overline{a + b}$</td>
<td></td>
<td>

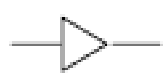
a	b	$F = \overline{a + b}$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

</td>
</tr>
<tr>
<td>O exclusive</td>
<td>$F = a \oplus b$</td>
<td></td>
<td>

a	b	$F = a \oplus b$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

</td>
</tr>
<tr>
<td>NOR exclusive</td>
<td>$F = \overline{a \oplus b}$</td>
<td></td>
<td>

a	b	$F = \overline{a \oplus b}$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

</td>
</tr>
<tr>
<td>Seguidor Buffer</td>
<td>$F = a$</td>
<td></td>
<td>

a	$F = \overline{a}$
0	0
1	1

</td>
</tr>
</table>

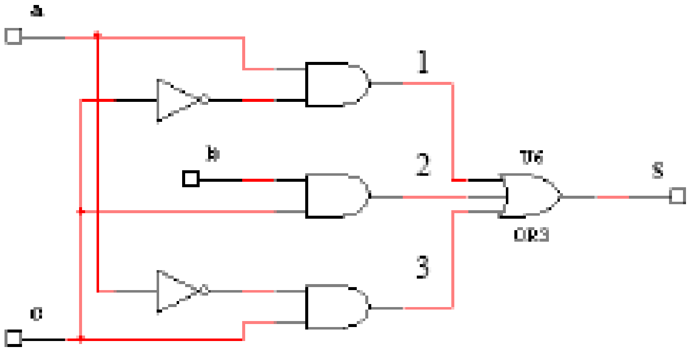
Ejercicios

Expresar $F(a,b,c) = a + \bar{b}c$ en forma de suma de minitérminos.

Hallar la 2ª forma canónica de $F(a,b)=\overline{a+a\overline{b}}$

Hallar la 2ª forma canónica de $F = m_1 + m_4 + m_6 + m_7$

Indicar la función lógica del circuito



x	y	z	S0	S1	S2
0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0
0	1	0	0	0	0
0	1	1	0	0	0
1	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	0
1	1	0	1	0	1
1	1	1	1	0	1

¿Cuál de las funciones S0, S1, S2 de la tabla de la verdad es equivalente a la función $f(x,y,z) = xy(z+\overline{z}) + x\overline{y}z$

Página 5

4.5 Simplificación de Funciones

Métodos

- Aplicación de las leyes del álgebra de Boole
- Mapas de Karnaugh

Mapas de Karnaugh

- Proceso sistemático para la simplificación de expresiones de conmutación.
- Se trata de una matriz de casillas o celdas, cada una de las cuales representa un mini-término de una Función Canonica
- Si FC tiene n-variables = 2^n casillas.

Mapas de Karnaugh (minitérminos)

2 variables

x_0 \ x_1	0	1
0	00(0)	01(1)
1	10(2)	11(3)

3 variables

x_2 \ x_1x_0	00	01	11	10
0	000(0)	001(1)	011(3)	010(2)
1	100(4)	101(5)	111(7)	110(6)

4 variables

x_3x_2 \ x_1x_0	00	01	11	10
00	0000(0)	0001(1)	0011(3)	0010(2)
01	0100(4)	0101(5)	0111(7)	0110(6)
11	1100(12)	1101(13)	1111(15)	1110(14)
10	1000(8)	1001(9)	1011(11)	1010(10)

Karnaugh: Procedimiento de simplificación

- Paso 1: rellenar el mapa
  - Ponemos un uno en la casilla correspondiente a cada minitérmino
    - El minitérmino m_i en la casilla i
- Construir los rectángulos
  - Cubrir todos los minitérminos con el mínimo número de rectángulos posibles.
  - Construir rectángulos tan grandes como sea posible.
  - Para simplificar, una casilla se puede cubrir varias veces.
    - Debe haber en el nuevo cuadrado algún término distinto
  - Hay que empezar con las casillas que se pueden cubrir de menos maneras.

Ej. 1: $f(x_3x_2x_1x_0)=\sum m(0,2,5,6,7,8,10,15)$

$$f(x_3x_2x_1x_0)=\overline{x_3}\,\overline{x_2}\,\overline{x_1}\,\overline{x_0}+\overline{x_3}\,\overline{x_2}\,x_1\overline{x_0}+\overline{x_3}x_2\overline{x_1}x_0+\overline{x_3}x_2x_1\overline{x_0}+$$
$$\overline{x_3}x_2x_1x_0+x_3\overline{x_2}\,\overline{x_1}\,\overline{x_0}+x_3\overline{x_2}x_1\overline{x_0}+x_3x_2x_1x_0$$

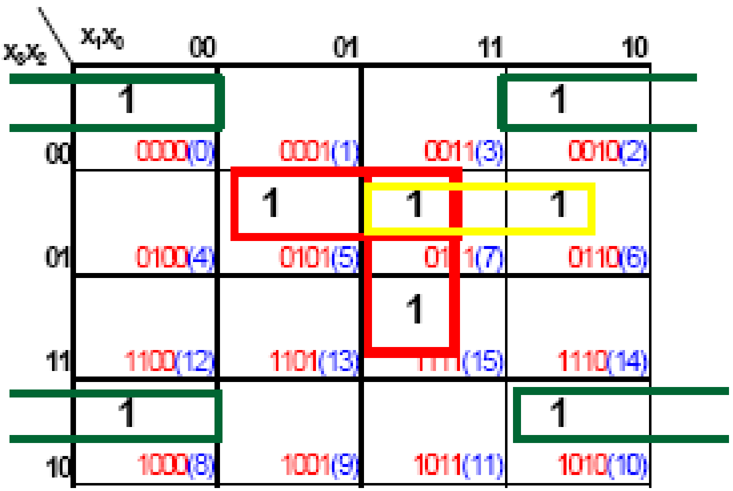
- Las casillas 5 y 15 sólo se pueden cubrir de una manera $\Rightarrow$ son las primeras que cubrimos.

- Las esquinas adyacentes van juntas.

x_3x_2 \ x_1x_0	00	01	11	10
00	1 0000(0)	 0001(1)	 0011(3)	1 0010(2)
01	 0100(4)	1 0101(5)	1 0111(7)	1 0110(6)
11	 1100(12)	 1101(13)	1 1111(15)	 1110(14)
10	1 1000(8)	 1001(9)	 1011(11)	1 1010(10)

- La casilla 6 puede ir con la 2 y con la 7. Elegimos la 7.

- Procedimiento de simplificación. Paso 2
  - Si tenemos un diagrama para n-variables y creamos rectángulos de 2^r casillas $\Rightarrow$ (n-r) dígitos iguales = número de variables en la expresión simplificada.



- $n=4 \wedge r=2 \Rightarrow 2$ variables $\Rightarrow \overline{x_0 x_2}$
- $n=4 \wedge r=1 \Rightarrow 3$ variables $\Rightarrow$

  5 y 7: $\overline{x_3} x_2 x_0$

  7 y 15: $x_1 x_2 x_0$
- $n=4 \wedge r=1 \Rightarrow 3$ variables $\Rightarrow$

  6 y 7: $\overline{x_3} x_2 x_1$

$$f(x_3x_2x_1x_0) = \overline{x_2}\,\overline{x_0} + \overline{x_3}x_2x_1 + \overline{x_3}x_2x_0 + x_2x_1x_0$$

Ej.2: $f(x_3x_2x_1x_0)=\sum m(0,2,3,5,8,9,12,13,14,15)$

$x_3x_2 \backslash x_1x_0$	00	01	11	10
00	1 0000(0)	0001(1)	1 0011(3)	1 0010(2)
01	0100(4)	1 0101(5)	0111(7)	0110(6)
11	1 1100(12)	1 1101(13)	1 1111(15)	1 1110(14)
10	1 1000(8)	1 1001(9)	1011(11)	1010(10)

- n=4 ∧ r=1 ⇒ 3 variables ⇒ $\overline{x}_3\overline{x}_2x_1$ $\quad \overline{x}_3\overline{x}_2\overline{x}_0$ $\quad \overline{x}_1x_0x_2$
- n=4 ∧ r=2 ⇒ 2 variables ⇒ x_3x_2
- n=4 ∧ r=2 ⇒ 2 variables ⇒ $x_3\overline{x}_1$

$$f(x_3x_2x_1x_0)=\overline{x}_3\overline{x}_2x_1+\overline{x}_3\overline{x}_2\overline{x}_0+x_2\overline{x}_1x_0+x_3x_2+x_3\overline{x}_1$$

Ej.3: $f(x_3x_2x_1x_0)=\sum m(0,1,2,3,5,7,8,9,10,11)$

$x_3x_2 \backslash x_1x_0$	00	01	11	10
00	1 0000(0)	1 0001(1)	1 0011(3)	1 0010(2)
01	0100(4)	1 0101(5)	1 0111(7)	0110(6)
11	1100(12)	1101(13)	1111(15)	1110(14)
10	1 1000(8)	1 1001(9)	1 1011(11)	1 1010(10)

- n=4 $\wedge$ r=3 $\Rightarrow$ 1 variable $\Rightarrow$ $\overline{x_2}$
- n=4 $\wedge$ r=2 $\Rightarrow$ 2 variables $\Rightarrow$ $\overline{x_3}x_0$

$$f(x_3x_2x_1x_0)=\overline{x_2}+\overline{x_3}x_0$$

Ej.4: $f(x_2x_1x_0)=\sum m(1,3,4,5)$

$x_2 \backslash x_1x_0$	00	01	11	10
0	0000(0)	1 0001(1)	1 0011(3)	0010(2)
1	1 0100(4)	1 0101(5)	0111(7)	0110(6)

- n=3 $\wedge$ r=1 $\Rightarrow$ 2 variables $\Rightarrow$ $\overline{x_2}x_0$
- n=3 $\wedge$ r=1 $\Rightarrow$ 2 variables $\Rightarrow$ $\overline{x_1}x_0$
- n=3 $\wedge$ r=1 $\Rightarrow$ 2 variables $\Rightarrow$ $\overline{x_1}x_2$

$$f(x_2x_1x_0) = \overline{x_2}x_0 + \overline{x_1}x_0 + \overline{x_1}x_2$$

$x_2 \backslash x_1x_0$	00	01	11	10
0	0000(0)	1 0001(1)	1 0011(3)	0010(2)
1	1 0100(4)	1 0101(5)	0111(7)	0110(6)

- n=3 $\wedge$ r=1 $\Rightarrow$ 2 variables $\Rightarrow$ $\overline{x_2}x_0$
- n=3 $\wedge$ r=1 $\Rightarrow$ 2 variables $\Rightarrow$ $\overline{x_1}x_2$

$$f(x_2x_1x_0) = \overline{x_2}x_0 + \overline{x_1}x_2$$

Simplificación FC incompletamente definidas

Ej.2: $f(x_3x_2x_1x_0)=\sum m(2,5,8,12,14)+\sum d(0,9,11,13,15)$

$x_3x_2 \backslash x_1x_0$	00	01	11	10
00	d 0000(0)	0001(1)	0011(3)	1 0010(2)
01	0100(4)	1 0101(5)	0111(7)	0110(6)
11	1 1100(12)	d 1101(13)	d 1111(15)	1 1110(14)
10	1 1000(8)	d 1001(9)	d 1011(11)	1010(10)

- n=4 $\wedge$ r=2 $\Rightarrow$ 2 variables $\Rightarrow$ x_3x_2
- n=4 $\wedge$ r=2 $\Rightarrow$ 2 variables $\Rightarrow$ $x_3\overline{x_1}$
- n=4 $\wedge$ r=1 $\Rightarrow$ 3 variables $\Rightarrow$ $\overline{x_3x_2x_0}$ $\quad$ $\overline{x_1}x_0x_2$

$$f(x_3x_2x_1x_0)=\overline{x_3x_2}\,\overline{x_0}+x_2\overline{x_1}x_0+x_3x_2+x_3\overline{x_1}$$

Mapas de Karnaugh (maxitérminos)

2 variables

x_0 \ x_1	0	1
0	00(3)	01(2)
1	10(1)	11(0)

4 variables

x_3x_2 \ x_1x_0	00	01	11	10
00	0000(15)	0001(14)	0011(12)	0010(13)
01	0100(11)	0101(10)	0111(8)	0110(9)
11	1100(3)	1101(2)	1111(0)	1110(1)
10	1000(7)	1001(6)	1011(4)	1010(5)

Mapas de Karnaugh (maxitérminos)

Ej.3: $f(x_3x_2x_1x_0)=\prod(1,3,4,9,11,12)$

x_3x_2 \ x_1x_0	00	01	11	10
00	0000(15)	0001(14)	0 0011(12)	0010(13)
01	0 0100(11)	0101(10)	0111(8)	0 0110(9)
11	0 1100(3)	1101(2)	1111(0)	0 1110(1)
10	1000(7)	1001(6)	0 1011(4)	1010(5)

- n=4 $\wedge$ r=2 $\Rightarrow$ 2 variables $\Rightarrow \overline{x_2} + x_0$
- n=4 $\wedge$ r=1 $\Rightarrow$ 3 variables $\Rightarrow x_2 + \overline{x_1} + \overline{x_0}$

$$f(x_3, x_2, x_1, x_0) = (\overline{x_2} + x_0)\cdot(x_2 + \overline{x_1} + \overline{x_0})$$

Ejercicio 4.5

$$f(x_2x_1x_0)=\sum m(0,6,7)+\sum d(1,2,5)=\overline{x_2}\,\overline{x_1}\,\overline{x_0}+x_2x_1\overline{x_0}+x_2x_1x_0$$

X_2	X_1	X_0	f
0	0	0	1
0	0	1	d
0	1	0	d
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	d
1	1	0	1
1	1	1	1

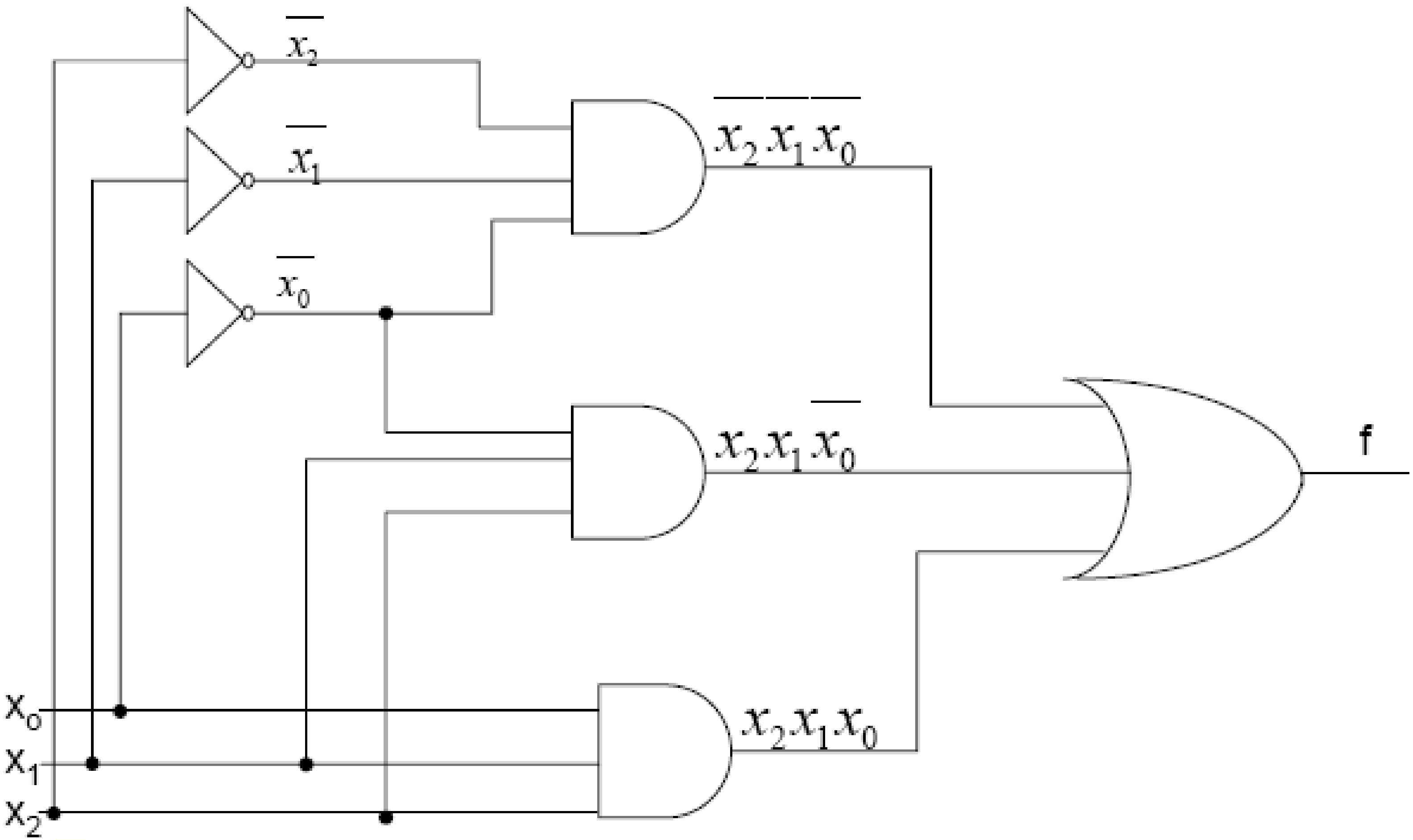
$x_2 \backslash x_1x_0$	00	01	11	10
0	1 0000(0)	d 0001(1)	0011(3)	d 0010(2)
1	0100(4)	d 0101(5)	1 0111(7)	1 0110(6)

- n=3 $\wedge$ r=1 $\Rightarrow$ 2 variables $\Rightarrow$ $\overline{x_2}\,\overline{x_0}$
- n=3 $\wedge$ r=1 $\Rightarrow$ 2 variables $\Rightarrow$ x_2x_1

$$f(x_2x_1x_0)=\overline{x_2}\,\overline{x_0}+x_2x_1$$

Ejercicio 4.5. Diseño con puertas lógicas

$$f(x_2 x_1 x_0) = \sum m(0,6,7) + \sum d(1,2,5) = \overline{x_2}\,\overline{x_1}\,\overline{x_0} + x_2 x_1 \overline{x_0} + x_2 x_1 x_0$$



Ej.4.5. Diseño simplificado con puertas lógicas

$$f(x_2 x_1 x_0) = \overline{x_2}\,\overline{x_0} + x_2 x_1$$