TEMA 6

INTRODUCCIÓN AL DISEÑO SECUENCIAL: CONTADORES Y REGISTROS

TEMA 6: INTRODUCCIÓN AL DISEÑO SECUENCIAL: CONTADORES Y REGISTROS

· Contexto
· Conocimiento Previo Necesario
· Objetivos del Tema
· Guía de Estudio
· Contenido del Tema

6.1. Introducción al Diseño Secuencial con Biestables D, T y J-K
6.2. Procedimiento General de Síntesis
6.3. Representación, Síntesis y análisis Modular de Autómatas con PLDS
6.3.1. Representación
6.3.2. Síntesis
6.3.3. Análisis
6.4. Diseño con biestables J-K
6.5. Contadores
6.5.1. Contadores Asíncronos
6.5.2. Contadores Síncronos
6.5.3. Aplicación del método general a la Síntesis de Contadores con PLDs
6.5.4. Simulación y ejemplos de Contadores
6.6. Registros de Desplazamiento
6.7. Problemas

· Preparación de la Evaluación
· Referencias Bibliográficas

+++ OBJETIVOS DEL TEMA

Objetivo 1: *Saber sintetizar circuitos secuenciales. Es decir, saber obtener un circuito a partir de la descripción en lenguaje natural de la función que queremos que realice. Además, debemos saber llegar hasta el final en el proceso de síntesis usando biestables D ó J-K.*

Objetivo 2: *Conocer la estructura interna (puertas y biestables) y el comportamiento externo de los distintos tipos de circuitos contadores. Saber manejar los datos de catálogo correspondientes y tener ciertos conocimientos sobre la función de estos circuitos cuando se integran en arquitecturas más complejas.*

Objetivo 3: *Conocer la estructura interna y el comportamiento de los distintos tipos de registros de desplazamiento. Saber manejar los datos de catálogo correspondientes y tener ciertos conocimientos sobre la función de estos circuitos cuando se integran en arquitecturas más complejas.*

6.1. Introducción al Diseño Secuencial con Biestables D, T y J-K

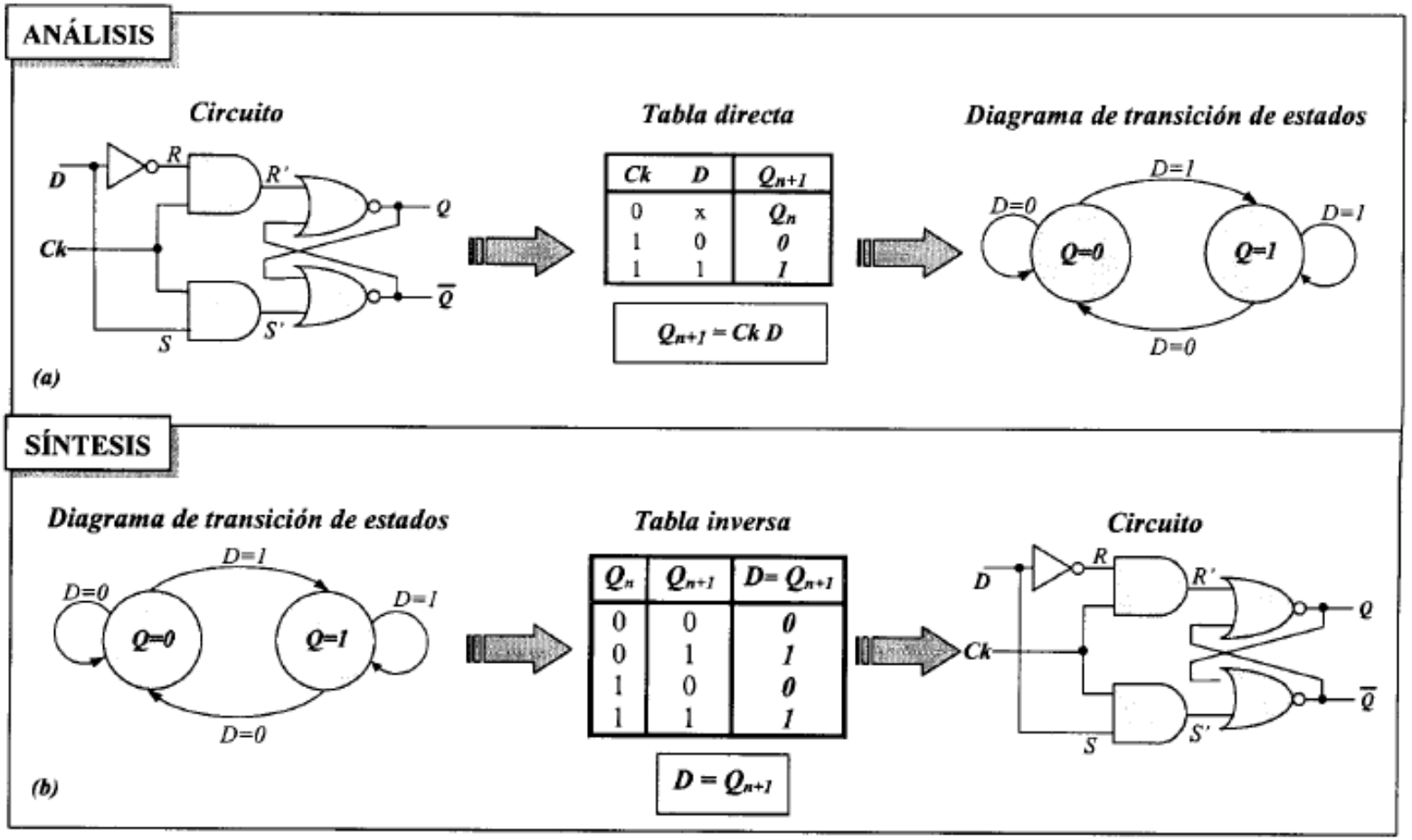
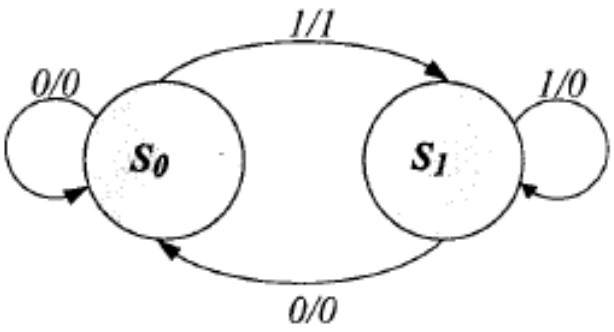


Figura 9.1. Ilustración sobre un biestable D de los procesos de análisis y síntesis. ***(a)*** Análisis : Dado D, calcular Q. ***(b)*** Síntesis: Dado el Qn+1 que necesito, ¿qué D debo usar?. Es decir, ¿cuál es la función de excitación, a partir de la tabla de transición de estados.?

El procedimiento de síntesis

- El procedimiento es el mismo para los tres ejemplos que vamos a ver en las siguientes transparencias:
  - 1. Disponer del diagrama de transición de estados.
  - 2. Obtener la tabla de la verdad de las transiciones compuesta por:
    - Las variables de entrada (los valores de las básculas en el estado inicial),
    - Las variables de salida (los valores de las básculas en el estado final),
    - Los valores necesarios en las entradas de cada báscula para obtener el estado final y los valores de las variables de salida.
  - 3. Obtener el circuito.

Ejercicio: *Sintetizar, usando un biestable D, el circuito secuencial correspondiente al autómata de dos estados de la figura.*



x	Q_n	Q_{n+1}	y	D
0	0	0	0	**0**
0	1	0	0	**0**
1	0	1	1	**1**
1	1	1	0	**1**

Así, de la observación de la primera y la última columna de la tabla vemos que $D=x$. Evidentemente, en un caso más complicado tendríamos que minimizar la expresión $D=f(x, Qn)$.

Análogamente, $y = x\,\overline{Q}_n$ *y por consiguiente el circuito secuencial del ejemplo es:*

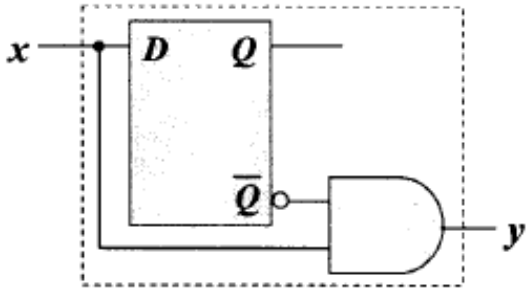


Figura 9.3. Circuito solución

- Hay que tener en cuenta que en una báscula D el valor de la salida Q sigue siempre al valor de la entrada D cuando entra el impulsos de reloj. Por lo tanto la entrada “D” será siempre igual al del valor de la Q_{n+1}final que se quiera obtener

Diseño con básculas “T”

- Hay que tener en cuenta que la respuesta de una báscula T es:

Entrada “T”	Salida
0	La salida no cambia
1	La salida bascula

Análisis

T	Q_n	Q_{n+1}
0	0	***0***
0	1	***1***
1	0	***1***
1	1	***0***

$$Q_{n+1} = T\,\overline{Q}_n + \overline{T}\,Q_n$$

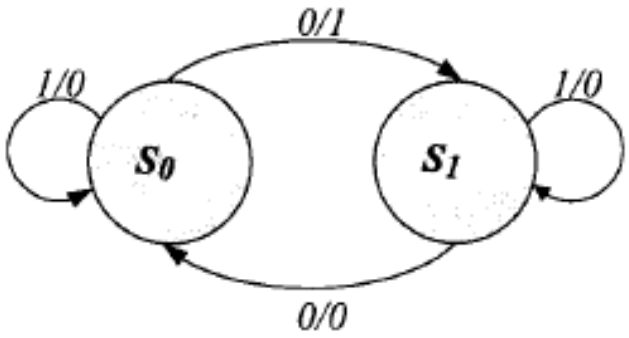
Síntesis

Q_n	Q_{n+1}	T
0	0	***0***
0	1	***1***
1	0	***1***
1	1	***0***

$$T = \overline{Q}_n\,Q_{n+1} + Q_n\,\overline{Q}_{n+1}$$

Figura 9.4. Obtención de la función de excitación en el biestable T a partir de su tabla de transición de estados.

Ejercicio: *Diseñar, usando un biestable T, un circuito secuencial cuyo diagrama de transición de estados sea:*



Solución:

Asociamos S_0 a $Q=0$ y S_1 a $Q=1$. Llamamos x a la entrada e y a la salida y pasamos la información del diagrama de transición de estados a la tabla de verdad.

x	Q_n	Q_{n+1}	y	T
0	0	1	1	***1***
0	1	0	0	***1***
1	0	0	0	***0***
1	1	1	0	***0***

Figura 9.5. Tabla de verdad

x	Q_n	Q_{n+1}	y	T
0	0	1	1	*1*
0	1	0	0	*1*
1	0	0	0	*0*
1	1	1	0	*0*

$$Q_{n+1} = \bar{x} \cdot \bar{Q}_n + x \cdot Q_n \qquad [9.5]$$

$$y = \bar{x} \cdot \bar{Q}_n = \overline{x + Q_n}\,, \qquad x = \bar{Q}_n \cdot \bar{Q}_{n+1} + Q_n \cdot Q_{n+1} \qquad [9.6]$$

Si negamos la expresión de X , aplicando las leyes de Morgan, obtenemos la misma expresión que T, por tanto T= X´

Como sabemos que $T = \bar{Q}_n \cdot Q_{n+1} + Q_n \cdot \bar{Q}_{n+1}$, obtenemos que la entrada del biestable , T, debe ser la negación de la entrada x. Así, $T = \bar{x} \cdot$, y el circuito:

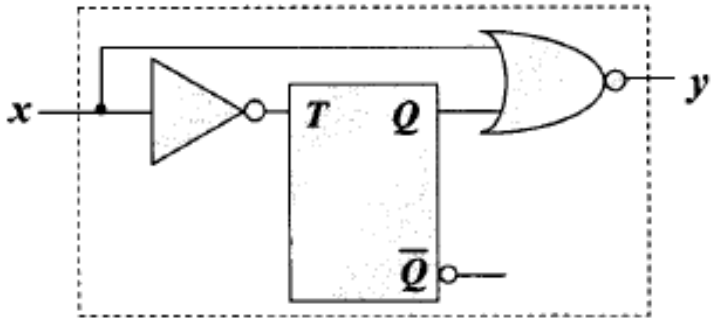


Figura 9.6. Circuito solución

Diseño con básculas “J-K”

Hay que tener en cuenta que la respuesta de una báscula JK es

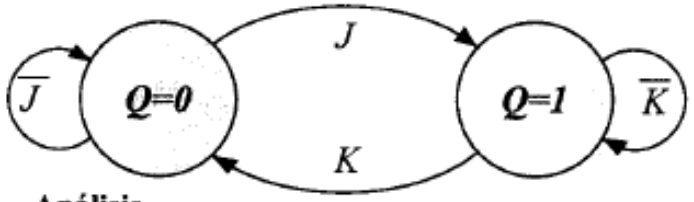
Si	$J = K = 0$	→	No cambia de estado	→ $Q_{n+1} = Q_n$
Si	$J = 1$ y $K = 0$	→	Pasa a “1	→ $Q_{n+1} = 1$
Si	$J = 0$ y $K = 1$	→	Pasa a “0”	→ $Q_{n+1} = 0$
Si	$J = K = 1$	→	Cambia de estado	→ $Q_{n+1} = \overline{Q_n}$

Estado inicial	Estado final	Respuesta de la báscula	Entrada “J”		Entrada “K”	
0	0	No cambiar o Poner a 0	0 0	0	0 1	X
0	1	Cambiar o Poner a 1	1 1	1	1 0	X
1	0	Cambiar o Poner a 0	1 0	X	1 1	1
1	1	No cambiar o Poner a 1	0 1	X	0 0	0

K=R= Reset (0)

J=S=Set(1)

(a)



Análisis

(b)

Q_n	Q_{n+1}	K	J	
0	0	0 1	0 0	$\overline{J}\,\overline{K}+\overline{J}K=\overline{J}$
0	1	0 1	1 1	$J\,\overline{K}+JK=J$
1	0	1 1	0 1	$\overline{J}K+JK=K$
1	1	0 0	0 1	$\overline{J}\,\overline{K}+J\,\overline{K}=\overline{K}$

Síntesis

Q_n	Q_{n+1}	J	K
0	0	0	*
0	1	1	*
1	0	*	1
1	1	*	0

(c)

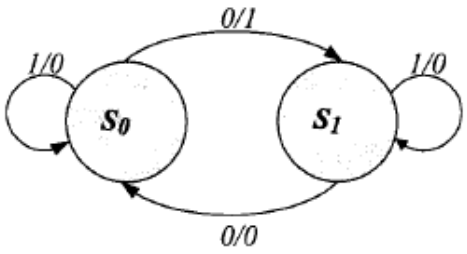
Figura 9.7. Funciones de excitación en biestables J-K necesarias para conseguir cada una de las cuatro transiciones posibles en el estado. ***(a)*** Diagrama de transición de estados. ***(b)*** Tabla del J-K. ***(c)*** Tabla de control del cambio de estado obtenida a partir de la *(b)* (tabla de excitación).

Ejercicio: *Comprobar que se ha comprendido la síntesis con J-K, repitiendo ahora los ejercicios que hicimos para los biestables D y T, es decir, sintetizar usando un J-K los autómatas que antes sintetizamos con D y T.*

Solución:

Calculemos los valores de J y K a partir de las tablas de verdad.

(a) Veamos el caso del primer ejercicio. Partimos de la tabla de verdad a la que hemos de añadirle dos nuevas columnas, una para *J* y otra para *K*. Estas columnas las rellenamos con los valores que deben tomar *J* y *K* respectivamente para que se cumpla las transiciones correspondientes de Q_n a Q_{n+1}. Así, la tabla es:



x	Q_n	Q_{n+1}	y	J	K
0	0	0	0	***0***	*
0	1	0	0	*	***1***
1	0	1	1	***1***	*
1	1	1	0	*	***0***

Síntesis

Q_n	Q_{n+1}	J	K
0	0	0	*
0	1	1	*
1	0	*	1
1	1	*	0

Figura 9.8. Tabla de verdad

Luego: $J = x \quad \text{y} \quad K = \overline{x}$

y por supuesto, la salida sigue siendo $y = x\,\overline{Q}_n$ y el circuito queda:

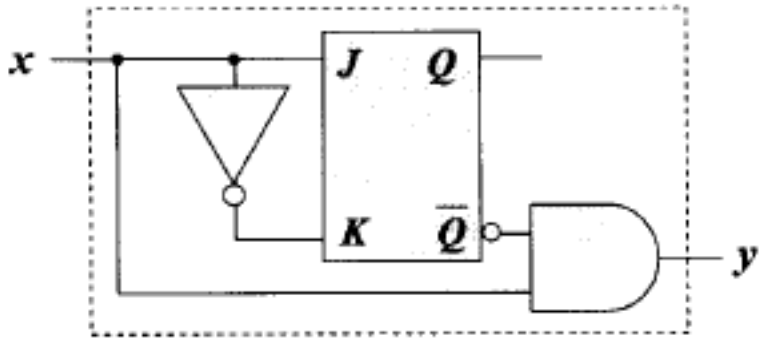


Figura 9.9. Circuito solución

Ejemplo T

x	Q	Q_{n+1}	y	J	K
0	0	1	1	1	x
1	0	0	0	0	x
0	1	0	0	x	1
1	1	1	0	x	0

(J)

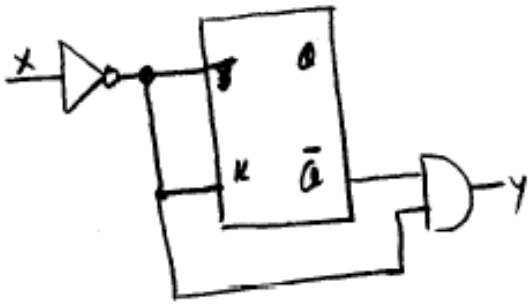
Q \ $\bar{x}$	$\bar{x}$	x
$\bar{Q}$	1	0
Q	x	x

$J = \bar{x}$

(K)

Q \ $\bar{y}$	$\bar{y}$	y
$\bar{Q}$	x	x
Q	1	0

$K = \bar{x}$



$y = \bar{x}\bar{Q}$

6.2. Procedimiento General de Síntesis

P.1. Descripción en *lenguaje natural* de forma clara, completa, precisa e inequívoca de la función que queremos sintetizar.

P.2. *Representación* de esa descripción en términos de *autómatas finitos*, especificando los espacios de entradas y salidas, el espacio de estados internos necesarios y las funciones de transición de estados y producción de salidas a partir de las entradas y los estados.

P.3. *Minimización* (en su caso) del número de estados. En un sistema secuencial hay tantos estados distintos como historias de estímulos distinguibles. Y no hacen falta más para duplicar la función. Si existen estados redundantes, conviene eliminarlos para conseguir una síntesis mínima sobre clases de equivalencia de estados.

P.4. *Selección de biestables* (D, T, J-K) y cálculo de las funciones de excitación correspondientes.

P.5. *Asignación de estados*. La asignación de estados es el procedimiento mediante el cual se hacen corresponder biestables específicos a cada uno de los bits resultado de la codificación en binario de los estados del autómata. Por ejemplo, podemos usar el siguiente procedimiento.

P.5.1. Sea A el número de estados del autómata. Para su síntesis necesitamos un *número de biestables*, N, tal que $2^N \geq A \geq 2^{N-1}$.

P.5.2. Entonces, *ordenamos* de forma arbitraria esos *estados* desde $S_0=0$ hasta $S_{A-1}=2^N-1$ y *rescribimos en binario el subíndice* que identifica al estado:

$$S_0 = (00...0),\ S_1 = (00...1),\ ...,\ S_{A-1} = (11...1)$$

P.5.3. Finalmente *elegimos un biestable*, $(Q_0, Q_1, ..., Q_{N-1})$, para cada bit del estado.

P.5.4. *Aplicamos los algoritmos de síntesis* para obtener las funciones $y_k(t) = D_k(t)$ de excitación de los N biestables D, a partir de las matrices de transición del autómata.

P.6. *Obtenemos de las funciones de excitación*, correspondientes a cada uno de esos N biestables.

Ya tenemos la *descripción formal* (P.2), la *minimización* (P.3), la *selección del tipo de biestable* con el que queremos realizar la síntesis (P.4) y la *asignación* de los bits que definen el estado (P.5). La última etapa del diseño es la *obtención de las funciones de excitación* (D_i, T_i ó J_i-K_i), de los N biestables , $(Q_0, Q_1, ..., Q_{N-1})$ que definen el estado del autómata.

6.3. Representación, Síntesis y Análisis Modular de Autómatas con PLDS

- Para representar un autómata necesitamos dos PLDs:
  - Uno para las transiciones de estado
    - En función de estado y entrada determinar el próximo estado
    - Utilizaremos celdas de tipo “D” para codificar y representar los estados
  - Otro para las salidas
    - En función del estado y entrada, determinar la próxima salida
  - Vamos a centrarnos en el primero

6.3.1. Representación

- Matriz de transición de estados:
- Las dimensiones de las matrices de transición serán de $2^N x 2^N$. Para A estados, necesitamos N biestables tal $2^N > A$
- Para M variables lógicas, necesitaremos 2^M Matrices de transición
- Cada matriz de transición solo tiene un uno por fila
- Para utilizar una representación mas compacta usamos la "Matriz Funcional"

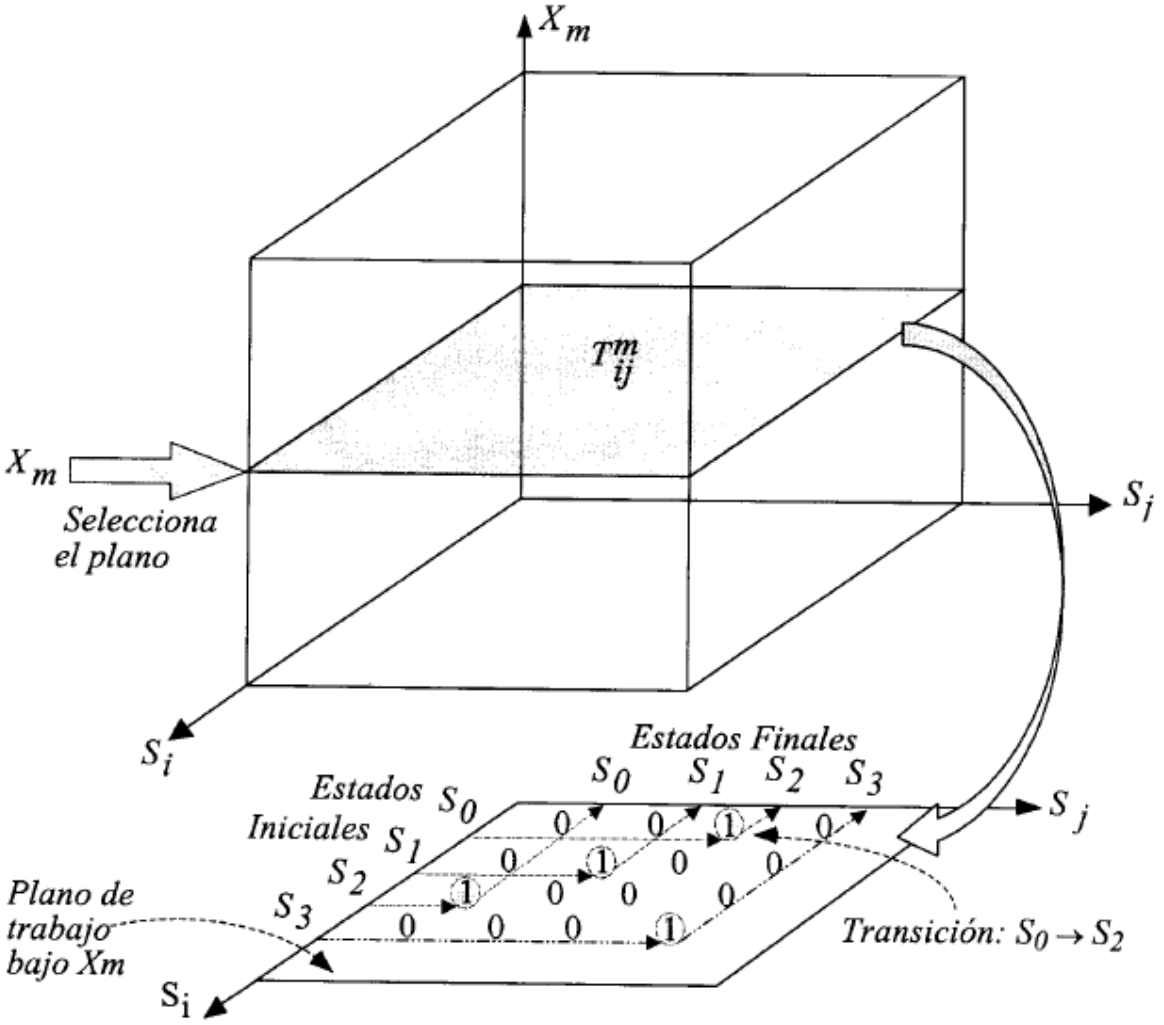
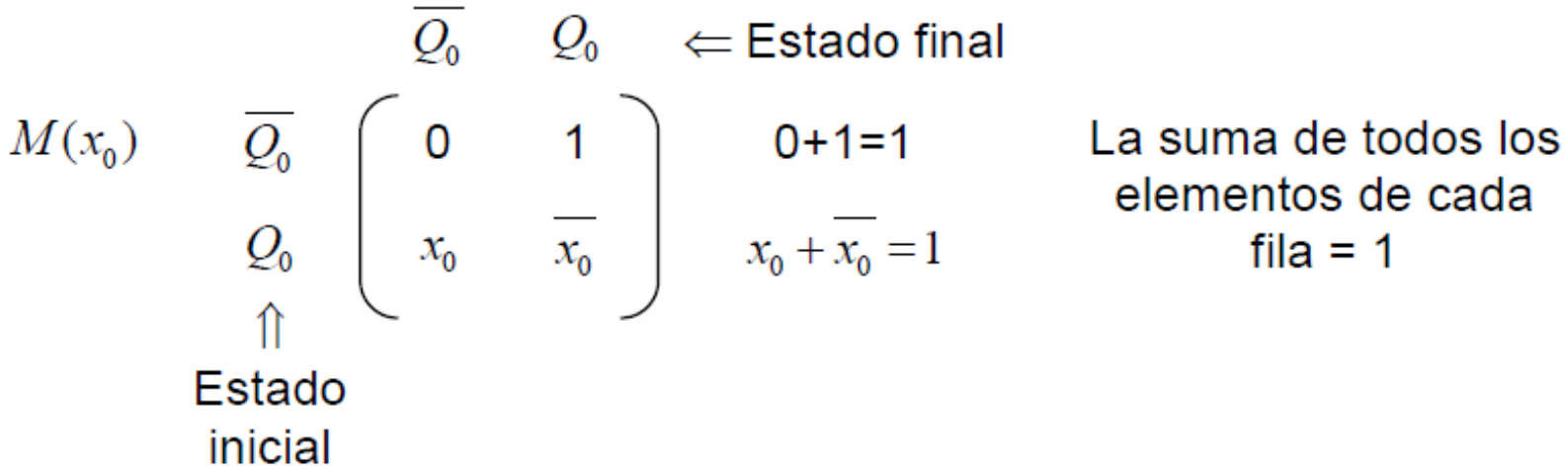


Figura 9.13. Representación por matrices de transición booleanas. Selección de plano y transiciones bajo entrada constante.

Matriz funcional

- Matriz que recoge los estados iniciales en la columna de la izquierda, los estados finales en la línea superior y en los cuadros de la matriz se representan los valores de las variables que provocan la transición entre los estados iniciales y los finales



Para centrar ideas pensemos cómo serían las matrices de transición para el caso mínimo de un autómata con sólo dos estados (S_0, S_1). Si sólo tiene dos estados las posibles transiciones podrán describirse usando matrices booleanas 2x2 y sólo pueden haber cuatro matrices de este tipo que sean distintas, en función de dónde tienen el uno en cada una de sus dos filas:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad [9.17]$$

Supongamos en este ejemplo de cuatro matrices que sólo necesitamos una variable externa, x0. Tenemos entonces dos configuraciones de entrada posibles ($x_0 = 0$, $x_0 = 1$) de modo que hay tantos autómatas distintos de dos estados y una entrada como formas distintas de asociar dos configuraciones con cuatro matrices. Por ejemplo, cogiendo las dos primeras, tendríamos:

$$\bar{x}_0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad x_0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad [9.19]$$

Y su matriz funcional será:

$$M(x_0) = \bar{x}_0 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + x_0 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \bar{x}_0 + x_0 \\ x_0 & \bar{x}_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ x_0 & \bar{x}_0 \end{pmatrix} \qquad [9.20]$$

6.3.2. Síntesis

Empecemos sin embargo estudiando la síntesis de ejemplos muy sencillos para captar la forma de proceder del método. Supongamos que queremos sintetizar un autómata de dos estados ($Q_0 = 0$, $Q_0 = 1$) y una entrada (x_0), cuya matriz funcional es:

$$M(x_0) = \begin{array}{c} \\ Q_0{=}0 \\ Q_0{=}1 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} Q_0{=}0 & Q_0{=}1 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ x_0 & \overline{x}_0 \end{pmatrix} \end{array}$$

[9.26]

Para el caso de diseño con básculas D:

El valor de D se obtendrá tomando las celdas que provocan que Q se ponga a 1 y realizando la suma de los productos entre las básculas del estado inicial y el valor que se encuentre en las celdas citadas:

$$D = \overline{Q_0} \bullet 1 + Q_0 \bullet \overline{x} = \overline{Q_0} + Q_0 \bullet \overline{x} = (\overline{Q_0} + Q_0) \bullet (\overline{Q_0} + \overline{x}) = \overline{Q_0} + \overline{x}$$

$$D_0 = \overline{Q}_0 \cdot 1 + Q_0 \cdot \overline{x}_0 = \overline{Q}_0 + Q_0 \cdot \overline{x}_0 \qquad [9.27]$$

El circuito correspondiente se ilustra en la *figura 9.14*.

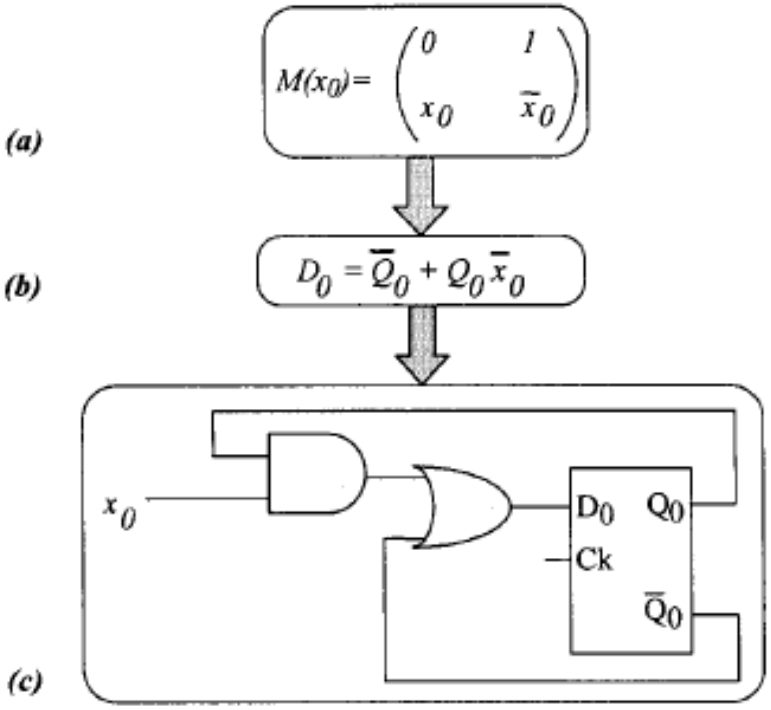


Figura 9.14. Ilustración del proceso de síntesis. ***(a)*** Representación. ***(b)*** Cálculo de la función de excitación. ***(c)*** *Circuito.*

Matriz funcional para 4 estados y dos variables lógicas

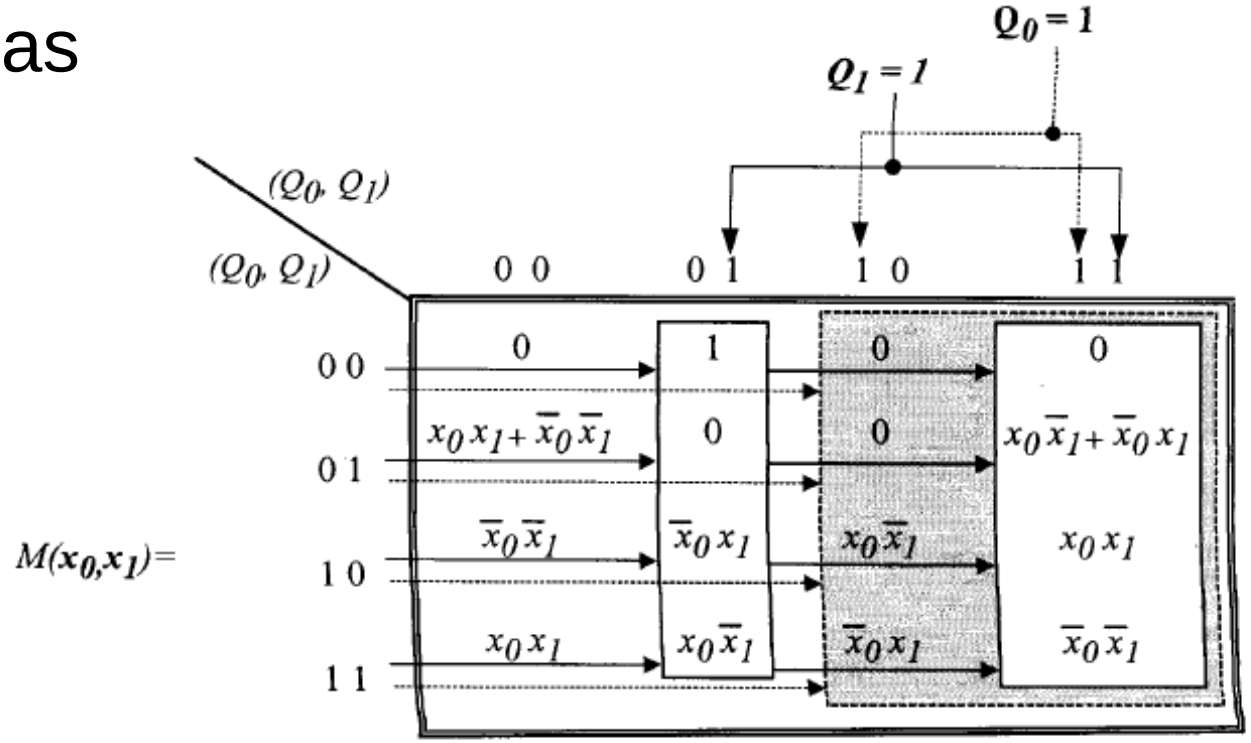


Figura 9.15. Matriz funcional correspondiente a un autómata de cuatro estados y dos variables lógicas de entrada. Los estados se codifican con dos biestables D y en cada una de las 16 posiciones de la matriz aparece el término mínimo o la suma de términos mínimos que provoca la transición entre la fila y la columna correspondientes.

Así pues, la expresión de D_0 será:

$$D_0 = \bar{Q}_0 \cdot Q_1 \underbrace{\left(x_0 \cdot \bar{x}_1 + \bar{x}_0 \cdot x_1\right)}_{x_0} + Q_0 \cdot \bar{Q}_1 \underbrace{\left(x_0 \cdot \bar{x}_1 + x_0 \cdot x_1\right)}_{x_0} + Q_0 \cdot Q_1 \underbrace{\left(\bar{x}_0 \cdot x_1 + \bar{x}_0 \cdot \bar{x}_1\right)}_{\bar{x}_0} \qquad [9.28]$$

Veamos ahora el cálculo de las funciones de excitación D_0 y D_1. Para calcular la expresión de D_0 hay que sumar todos los caminos que llevan desde cualquier estado inicial a los estados finales (10 ó 11). Es decir a alguno de los estados finales en los que $Q_0=1$. En el ejemplo de la figura 9.15 sumaremos las columnas tercera y cuarta multiplicando la configuración de cada uno de los estados iniciales por los elementos correspondientes de la matriz.

Así pues, la expresión de D_0 será:

$$D_0 = \overline{Q}_0 \cdot Q_1\left(x_0 \cdot \overline{x}_1 + \overline{x}_0 \cdot x_1\right) + Q_0 \cdot \overline{Q}_1\left(\overbrace{x_0 \cdot \overline{x}_1}^{x_0} + x_0 \cdot x_1\right) + Q_0 \cdot Q_1\left(\overbrace{\overline{x}_0 \cdot x_1}^{\overline{x}_0} + \overline{x}_0 \cdot \overline{x}_1\right) \qquad [9.28]$$

Procediendo de la misma forma, para obtener D_1 sumamos los caminos que llevan desde cualquier estado inicial a los dos estados finales que poseen el bit Q_1 en alta (estados 01 y 11),

$$D_1 = \overline{Q}_0 \cdot \overline{Q}_1 + \overline{Q}_0 \cdot Q_1\left(x_0 \cdot \overline{x}_1 + \overline{x}_0 \cdot x_1\right) + Q_0 \cdot \overline{Q}_1\left(\overbrace{\overline{x}_0 \cdot x_1}^{x_1} + x_0 \cdot x_1\right) + Q_0 \cdot Q_1\left(x_0 \cdot \overline{x}_1 + \overline{x}_0 \cdot \overline{x}_1\right) \qquad [9.29]$$

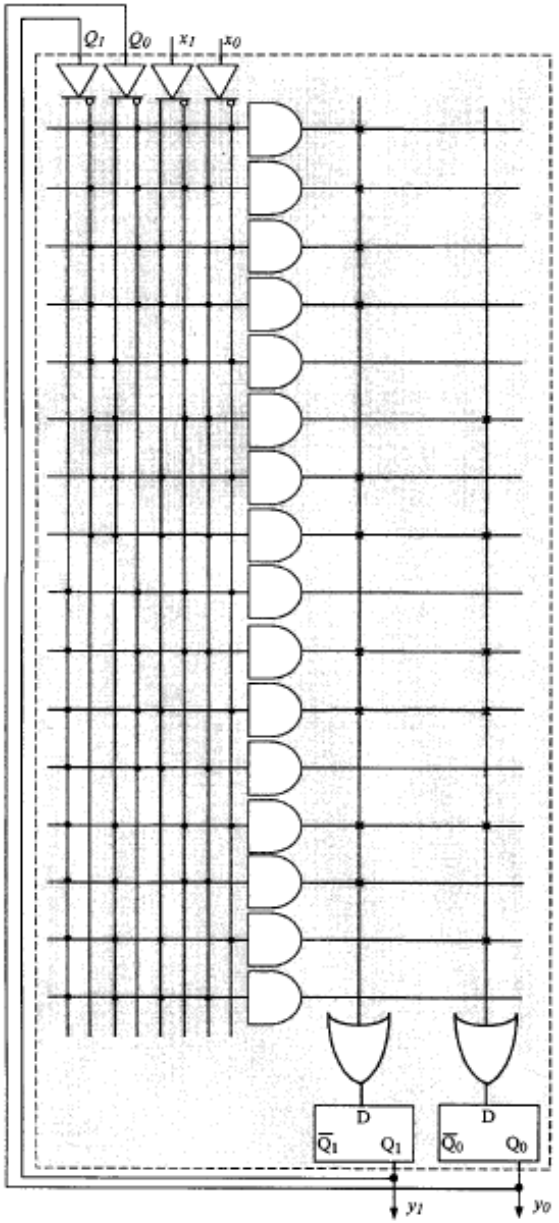


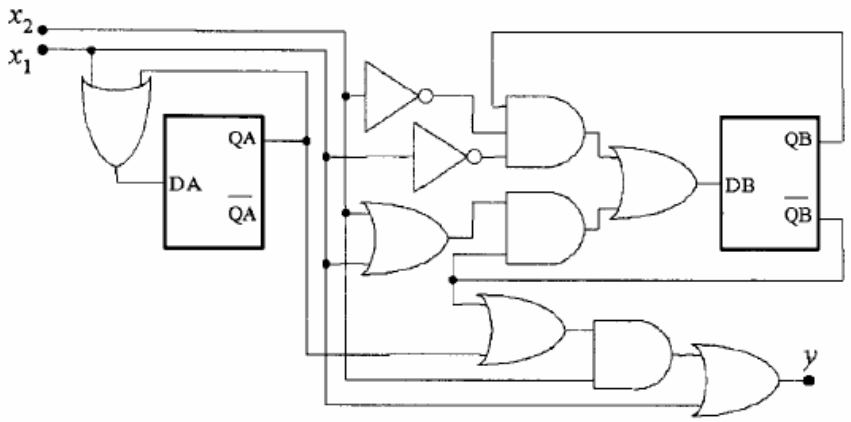
Figura 9.16. Síntesis de autómatas finitos de cuatro estados y dos variables externas con una arquitectura PROM de cuatro entradas.

6.3.3. Análisis

- El análisis consiste en obtener la matriz funcional y/o el diagrama de etapas a partir de un circuito determinado.

Para estudiar el procedimiento vamos a partir del ejemplo del problema correspondiente al examen de Junio del 2003.

2. Analice el **circuito secuencial** de la figura, presentando el resultado del análisis mediante las **expresiones lógicas** correspondientes, la **matriz funcional** y el **diagrama de transición de estados.**



En primer lugar obtendremos las funciones correspondientes a cada variable (Di e "y") a partir del esquema suministrado:

$$D_A = x_1 + Q_A \qquad D_B = \overline{x_1} \bullet \overline{x_2} \bullet Q_B + (x_1 + x_2)\overline{Q_B} \qquad y = (Q_A + \overline{Q_B})x_2 + x_1$$

Matriz funcional

	Estado inicial		Estado final	
$Q_B Q_A$	**00**	**01**	**10**	**11**
00	m_{00}	m_{01}	m_{02}	m_{03}
01	m_{10}	m_{11}	m_{12}	m_{13}
10	m_{20}	m_{21}	m_{22}	m_{23}
11	m_{30}	m_{31}	m_{32}	m_{33}

$m_{ij} \Rightarrow$ ***celda de fila i y columna j***

El cálculo de cada una de las celdas se efectuará:

1. La función de la fila de cada celda se obtendrá de sustituir las Q_m por su valor correspondiente a las variables del estado inicial.
2. La función de la columna de cada celda se obtendrá de sustituir las Q_m por su valor correspondiente a las variables del estado final.

$D_A = x_1 + Q_A$	$D_B = \overline{x_1} \bullet \overline{x_2} \bullet Q_B + (x_1 + x_2)\overline{Q_B}$

Funciones de la fila 0 m_0	***Estados iniciales*** $\Rightarrow$	$Q_B Q_A = 00$ $\Downarrow$
$D_A = x_1 + Q_A = x_1 + 0 = x_1$ $D_B = \overline{x_1} \bullet \overline{x_2} \bullet Q_B + (x_1 + x_2)\overline{Q_B} = \overline{x_1} \bullet \overline{x_2} \bullet 0 + (x_1 + x_2)1 = (x_1 + x_2)$		
Estados finales		
$m_{00} = \overline{D_B} \bullet \overline{D_A}$	$m_{00} = \overline{D_B} \bullet \overline{D_A} = \overline{(x_1 + x_2)} \bullet \overline{x_1} = \overline{x_1} \bullet \overline{x_1} \bullet \overline{x_2} = \overline{x_1} \bullet \overline{x_2}$	
$m_{01} = \overline{D_B} \bullet D_A$	$m_{01} = \overline{D_B} \bullet D_A = \overline{(x_1 + x_2)} \bullet x_1 = x_1 \bullet \overline{x_1} \bullet \overline{x_2} = 0$	
$m_{02} = D_B \bullet \overline{D_A}$	$m_{02} = D_B \bullet \overline{D_A} = (x_1 + x_2) \bullet \overline{x_1} = \overline{x_1} \bullet x_1 + \overline{x_1} \bullet x_2 = \overline{x_1} \bullet x_2$	
$m_{03} = D_B \bullet D_A$	$m_{03} = D_B \bullet D_A = (x_1 + x_2) \bullet x_1 = x_1 \bullet x_1 + x_1 \bullet x_2 = x_1$	

Funciones de la fila 1 m_1	*Estados iniciales* $\Rightarrow$	$Q_B Q_A = 01$ $\Downarrow$
$D_A = x_1 + Q_A = x_1 + 1 = 1$ $D_B = \overline{x_1} \bullet \overline{x_2} \bullet Q_B + (x_1 + x_2)\overline{Q_B} = \overline{x_1} \bullet \overline{x_2} \bullet 0 + (x_1 + x_2)1 = (x_1 + x_2)$		
Estados finales		
$m_{10} = \overline{D_B} \bullet \overline{D_A}$	$m_{10} = \overline{D_B} \bullet \overline{D_A} = \overline{(x_1 + x_2)} \bullet \overline{1} = 0$	
$m_{11} = \overline{D_B} \bullet D_A$	$m_{11} = \overline{D_B} \bullet D_A = \overline{(x_1 + x_2)} \bullet 1 = \overline{(x_1 + x_2)} = \overline{x_1} \bullet \overline{x_2}$	
$m_{12} = D_B \bullet \overline{D_A}$	$m_{12} = D_B \bullet \overline{D_A} = (x_1 + x_2) \bullet \overline{1} = 0$	
$m_{13} = D_B \bullet D_A$	$m_{13} = D_B \bullet D_A = (x_1 + x_2) \bullet 1 = x_1 + x_2$	

Funciones de la fila 2 m_2	*Estados iniciales* $\Rightarrow$	$Q_B Q_A = 10$ $\Downarrow$
$D_A = x_1 + Q_A = x_1 + 0 = x_1$ $D_B = \overline{x_1} \bullet \overline{x_2} \bullet Q_B + (x_1 + x_2)\overline{Q_B} = \overline{x_1} \bullet \overline{x_2} \bullet 1 + (x_1 + x_2)0 = \overline{x_1} \bullet \overline{x_2}$		
Estados finales		
$m_{20} = \overline{D_B} \bullet \overline{D_A}$	$m_{20} = \overline{D_B} \bullet \overline{D_A} = \overline{\overline{x_1} \bullet \overline{x_2}} \bullet \overline{x_1} = (x_1 + x_2)\overline{x_1} = \overline{x_1} x_2$	
$m_{21} = \overline{D_B} \bullet D_A$	$m_{21} = \overline{D_B} \bullet D_A = \overline{\overline{x_1} \bullet \overline{x_2}} \bullet x_1 = (x_1 + x_2)x_1 = x_1$	
$m_{22} = D_B \bullet \overline{D_A}$	$m_{22} = D_B \bullet \overline{D_A} = \overline{x_1} \bullet \overline{x_2} \bullet \overline{x_1} = \overline{x_1} \bullet \overline{x_2}$	
$m_{23} = D_B \bullet D_A$	$m_{23} = D_B \bullet D_A = \overline{x_1} \bullet \overline{x_2} \bullet x_1 = 0$	

Funciones de la fila 3 m_3	*Estados iniciales* $\Rightarrow$	$Q_B Q_A = 11$ $\Downarrow$
$D_A = x_1 + Q_A = x_1 + 1 = 1$ $D_B = \overline{x_1} \bullet \overline{x_2} \bullet Q_B + (x_1 + x_2)\overline{Q_B} = \overline{x_1} \bullet \overline{x_2} \bullet 1 + (x_1 + x_2)0 = \overline{x_1} \bullet \overline{x_2}$		
Estados finales		
$m_{30} = \overline{D_B} \bullet \overline{D_A}$	$m_{30} = \overline{D_B} \bullet \overline{D_A} = \overline{\overline{x_1} \bullet \overline{x_2}} \bullet 0 = 0$	
$m_{31} = \overline{D_B} \bullet D_A$	$m_{31} = \overline{D_B} \bullet D_A = \overline{\overline{x_1} \bullet \overline{x_2}} \bullet 1 = x_1 + x_2$	
$m_{32} = D_B \bullet \overline{D_A}$	$m_{32} = D_B \bullet \overline{D_A} = \overline{x_1} \bullet \overline{x_2} \bullet 0 = 0$	
$m_{33} = D_B \bullet D_A$	$m_{33} = D_B \bullet D_A = \overline{x_1} \bullet \overline{x_2} \bullet 1 = \overline{x_1} \bullet \overline{x_2}$	

Matriz funcional

Estado inicial **Estado final**

$Q_B Q_A$	00	01	10	11
00	$\overline{x_1} \bullet \overline{x_2}$	0	$\overline{x_1} \bullet x_2$	x_1
01	0	$\overline{x_1} \bullet \overline{x_2}$	0	$x_1 + x_2$
10	$\overline{x_1} x_2$	x_1	$\overline{x_1} \bullet \overline{x_2}$	0
11	0	$x_1 + x_2$	0	$\overline{x_1} \bullet \overline{x_2}$

Suma de fila 0:

$$\sum fila0 = (\overline{x_1} \bullet \overline{x_2}) + 0 + \overline{x_1} \bullet x_2 + x_1 = \overline{x_1}(\overline{x_2} + x_2) + x_1 = \overline{x_1} + x_1 = 1$$

Suma de fila 1:

$$\sum fila1 = 0 + \overline{x_1} \bullet \overline{x_2} + 0 + x_1 + x_2 = (x_1 + \overline{x_1}) \bullet (x_1 + \overline{x_2}) + x_2 = x_1 + \overline{x_2} + x_2 = 1$$

Suma de fila 2:

$$\sum fila2 = \overline{x_1} x_2 + x_1 + \overline{x_1} \bullet \overline{x_2} + 0 = (x_1 + \overline{x_1}) \bullet (x_1 + x_2) + \overline{x_1} \bullet \overline{x_2} = x_1 + x_2 + \overline{x_1} \bullet \overline{x_2} = (x_1 + \overline{x_1}) \bullet (x_1 + \overline{x_2}) + x_2 = x_1 + \overline{x_2} + x_2 = 1$$

Suma de fila 3:

$$\sum fila3 = 0 + (x_1 + x_2) + 0 + \overline{x_1} \bullet \overline{x_2} = (x_1 + \overline{x_1}) \bullet (x_1 + \overline{x_2}) + x_2 = x_1 + \overline{x_2} + x_2 = 1$$

6.4. Diseño con biestables J-K

- Síntesis

Ejemplo con dos estados

$$M(x_0)\quad \begin{matrix} & (0)\ \overline{Q_0} & Q_0 \\ (0)\ \overline{Q_0} & 0 & 1 \\ (1)\ Q_0 & x_0 & \overline{x_0} \end{matrix}$$

(1) ⇐ Estado final

$0+1=1$

$x_0 + \overline{x_0} = 1$

⇑ Estado inicial

Para el caso de diseño con básculas JK:

- El valor de J se obtendrá de tomar las celdas que provocan que Q pase de 0 a 1
- El valor de K se obtendrá de tomar las celdas que provocan que Q estando a 1 siga a 1 y posteriormente se ***invertirá*** dicho valor de K.

De esta manera (J=1 y K=0) se consigue que la báscula se ponga a 1 independientemente de si anteriormente era 0 ó 1.

$$J = \overline{Q_0} \bullet 1 = \overline{Q_0} \qquad \overline{K} = Q_0 \bullet \overline{x} \Rightarrow K = \overline{Q_0 \bullet \overline{x}} = x + \overline{Q_0}$$

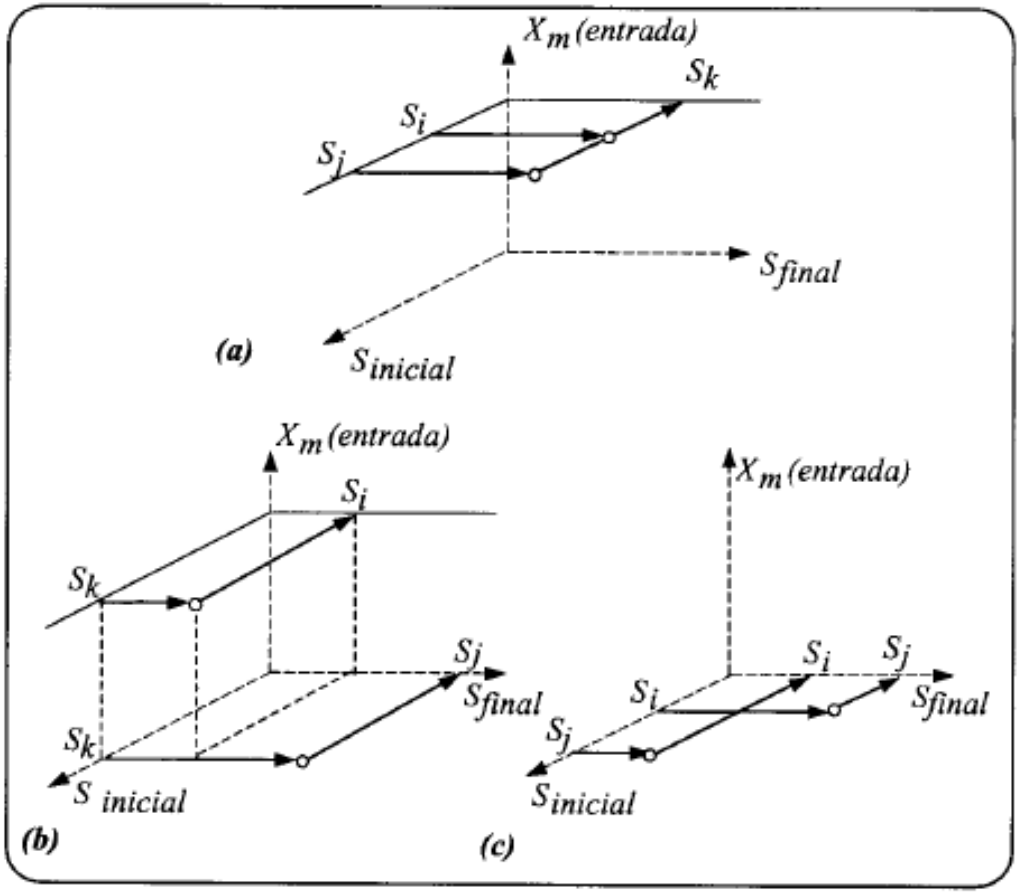


Figura 9.17. Distintas relaciones de adyacencia. ***(a)*** Relación de adyacencia A_1 (estados iniciales distintos dan lugar al mismo estado final). ***(b)*** Un mismo estado inicial con distintas entradas da lugar a distintos estados finales A_2. ***(c)*** A_3, ciclo de oscilación.

Reglas generales de adyacencia

- Reordenación de los estados para obtener expresiones mínimas en Karnaugh, hay que aplicar las reglas de adyacencia

Regla A.1 generalizada. Se deben dar asignaciones adyacentes a estados con igual estado siguiente para alguna entrada. Cuanto mayor sea el número de estados siguientes iguales, mayor prioridad.

Regla A.2 generalizada. Se deben dar asignaciones adyacentes a estados sucesores de un mismo estado para entradas adyacentes (que sólo varían en el valor de uno de sus bits).

ANÁLISIS

Matriz Funcional: $M(X_m)$

$$m_{ij}(X_m) = f_0^q(X_m;S_i)\cdot f_1^r(X_m;S_i)\cdots f_{N-1}^t(X_m;S_i)$$

siendo: $m_{ij}(X_m)$ *los elementos de la matriz funcional*

$(q, r, \ldots, t)$ *los dígitos binarios correspondientes al estado final* S_j

S_i = *estado inicial* S_j = *estado final*

Notación de Gilstrap:

$$f_n^0(X_m;S_i) = \overline{f_n(X_m;S_i)} \qquad f_n^1(X_m;S_i) = f_n(X_m;S_i)$$

SÍNTESIS

Funciones de Excitación de los N biestables D: $D_k(t)$

$$D_k(t) = \sum_{i=0}^{2^{N-1}}\left\{\sum_j M_{ij}(X_m)\cdot S_j\right\} = \sum_{i=0}^{2^{N-1}}\sum_j M_{ij}(X_m)\cdot Q_0^a\cdot Q_1^b\cdots Q_{N-1}^f$$

para todo $j \mid S_j\{\, S_k \mid Q_k=1\}$

$S_i = Q_0^a\cdot Q_1^b\cdots Q_{N-1}^f\cdot$ = *estado inicial*

$(a, b, \ldots, f)$ *codificación binaria correspondientes al estado inicial* S_i

S_j = *estado final*

Notación de Gilstrap:

$Q_i^a = Q_i$ si $a = 1$

$Q_i^a = \overline{Q_i}$ si $a = 0$

Figura 9.18. Resumen de los algoritmos de análisis y síntesis de autómatas finitos.

6.5. Contadores

- Los contadores son circuitos secuenciales capaces de recorrer una secuencia previamente especificada de estados.
  - Reciben un tren de impulsos y responden con una sucesión de estados correspondientes a la representación en binario del número de impulsos recibidos desde que se inició el ciclo.

Tipos de contadores

- **Asíncronos**: Las báscula que componen el contador no cambian de estado exactamente al mismo tiempo, dado que no comparten el mismo impulso de reloj.
- **Síncronos**: Hay una relación temporal fija entre sí. Todas las básculas que componen el contador reciben en el mismo instante la señal de reloj y por lo tanto cambian (si han de cambiar) en el mismo instante.

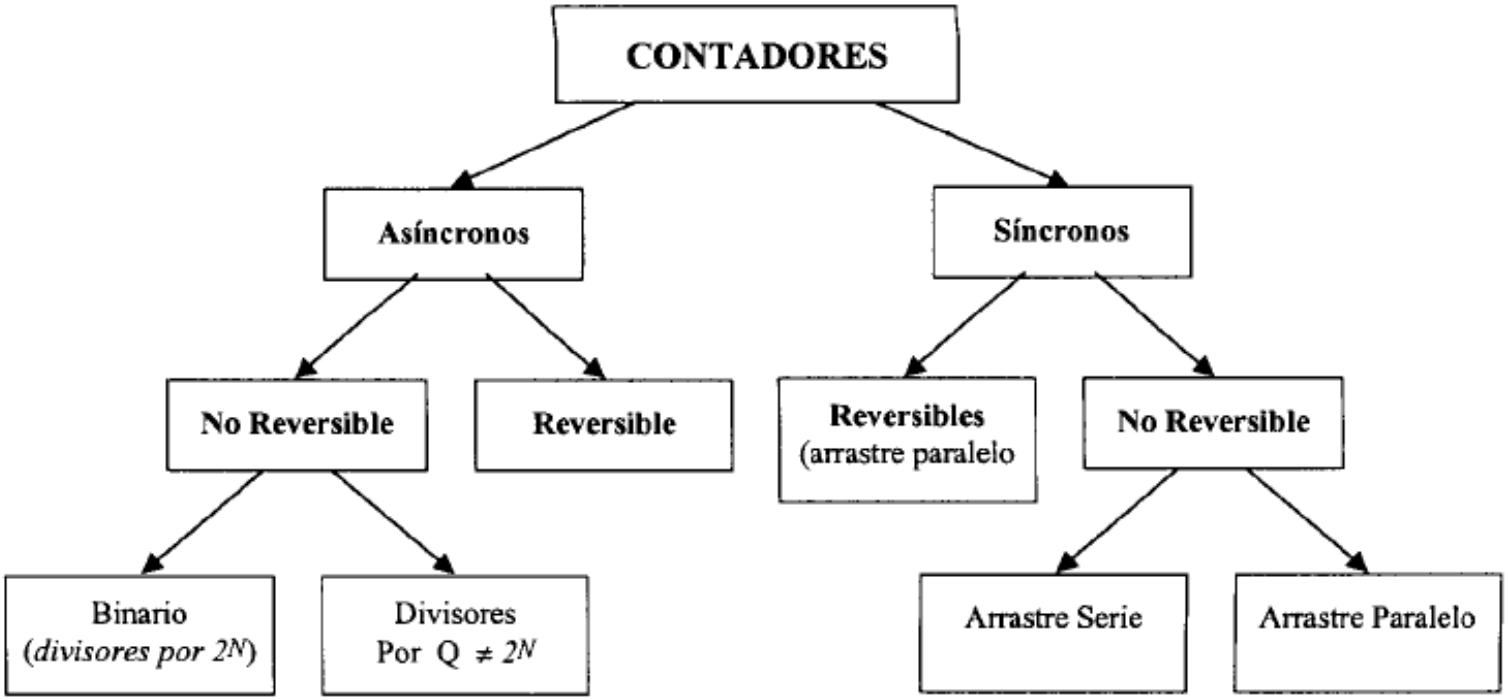
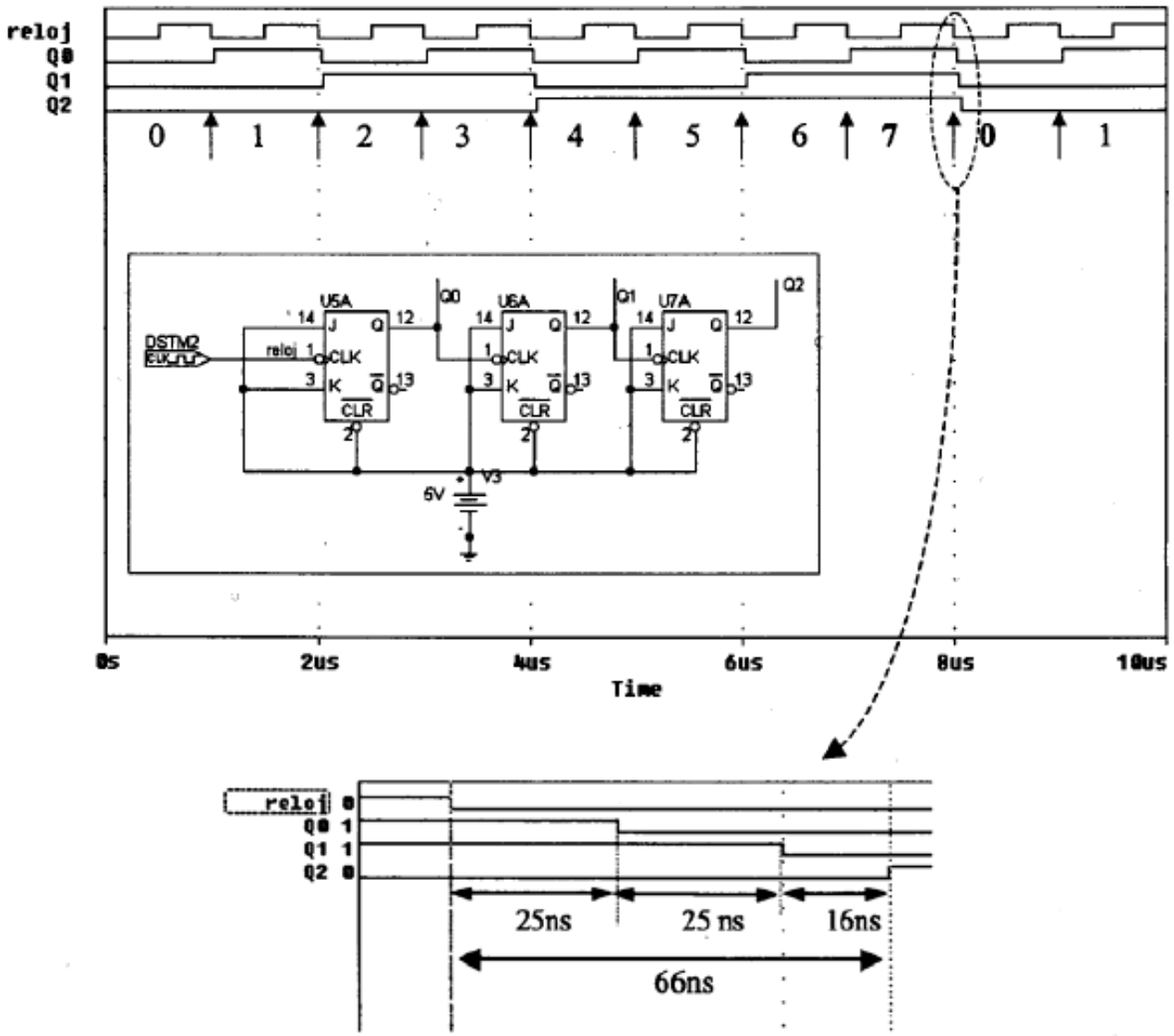


Figura 9.19 Clasificación de los distintos tipo de contadores.

Decimos que un contador asíncrono es binario cuando le dejamos terminar su ciclo máximo (2^N para N bits). En cambio, decimos que es un divisor por Q (menor y distinto de 2^N) cuando se corta el ciclo de incrementar el contenido del contador en ese valor Q (5, 7, 12, etc.), devolviendo desde aquí al contador a su estado inicial (00…0).

6.5.1. Contadores Asíncronos

- Compuestos por básculas JK con J=K=1 (básculas T) de forma que la ***entrada de relo***j entra ***en la primera báscula*** (bit de menor peso) y el ***reloj*** del ***resto de las básculas*** es la ***salida Q de la báscula anterior.***
- Esto provoca el sentido asíncrono del contador, ya que cuando entra el impulso de reloj a la primera báscula esta empieza a bascular, pero la siguiente no basculará hasta que no lo haya hecho la anterior.
- Este efecto provoca una reacción que se va añadiendo de báscula a báscula y por lo tanto el tiempo de cambio de un estado al otro puede ser el resultado de acumular los tiempos de transición del número de básculas que intervienen en dicho cambio.
- Suponemos que los biestables J-K usados son los que se disparan con la bajada del pulso de reloj



Contador asíncrono de 3 bits construido con J-K de disparo a bajadas.

Contador Reversible

- Para x=1 seleccionamos la entrada de reloj de cada báscula de la salida *Q* de la báscula anterior, por lo tanto se comporta como un contador ascendente.
- Para x=0 seleccionamos la entrada de reloj de cada báscula de la salida *Q´(negada)* de la báscula anterior, por lo tanto se comporta como un contador descendente.

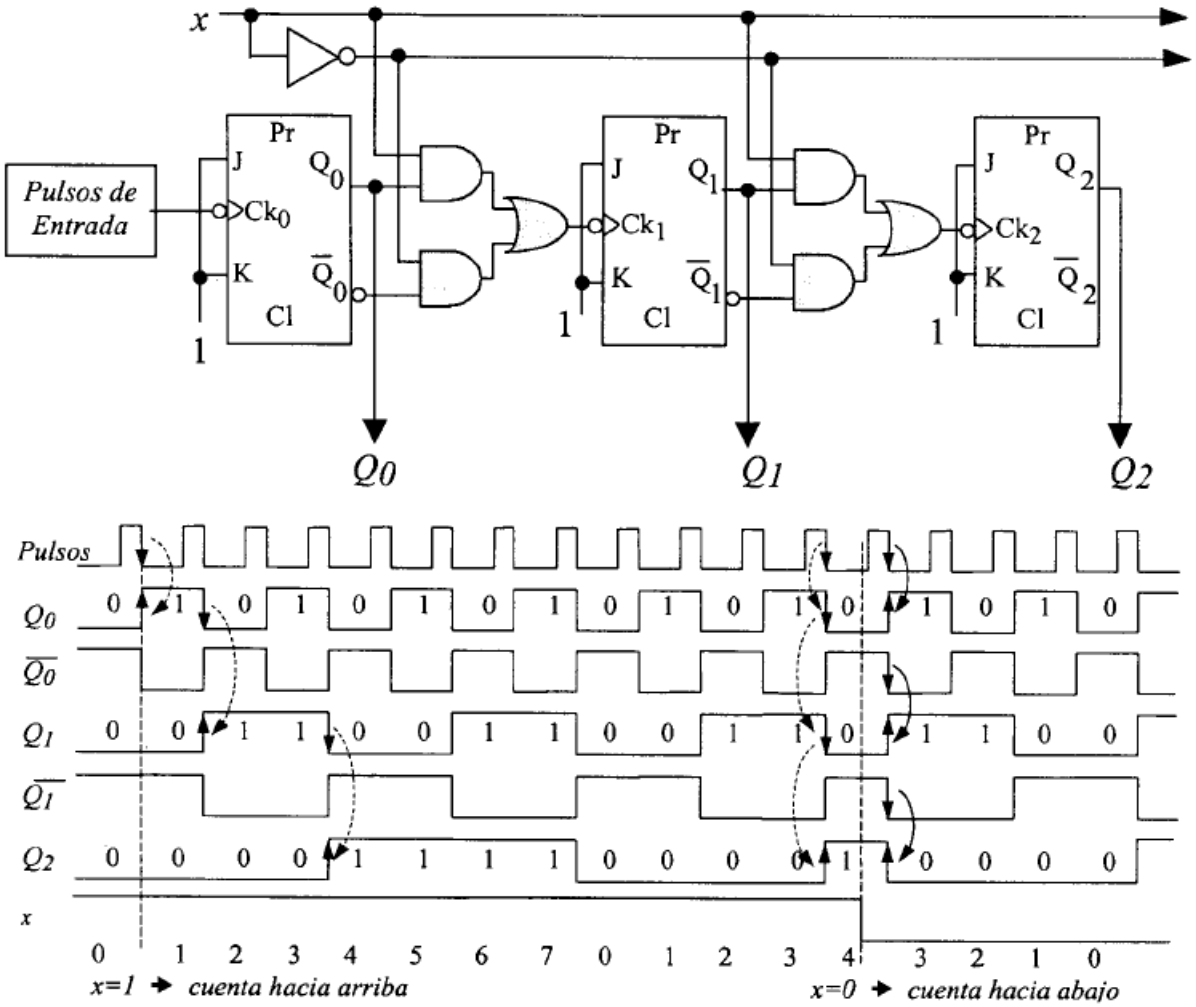


Figura 9.21. Contador asíncrono reversible de 4 bits.

Contadores de diferentes bases y divisores de frecuencia

- Hay dos formas de implementar contadores binarios de diferentes bases:
  - 1. Resetear todo el contador cuando el número binario al que llega contando es el de la base que se quiere conseguir.
    - Ello provoca la puesta a cero del contador y el inicio de un nuevo ciclo.(clear)
  - 2. Poner a “1” todas las básculas del contador mediante el “Preset” cuando se llega al número de la base al que se quiere llegar menos 1 (base-1).
    - Ello provoca que el contador llega al máximo de su capacidad de cuenta y de esta manera con el siguiente impulso de reloj se provoca su puesta a “0” y consiguiente inicio de ciclo de cuenta. (preset)
- La implementación de divisores de frecuencia básicamente consiste en implementar contadores cuya base será el número por el que se quiere dividir la frecuencia.

Preset

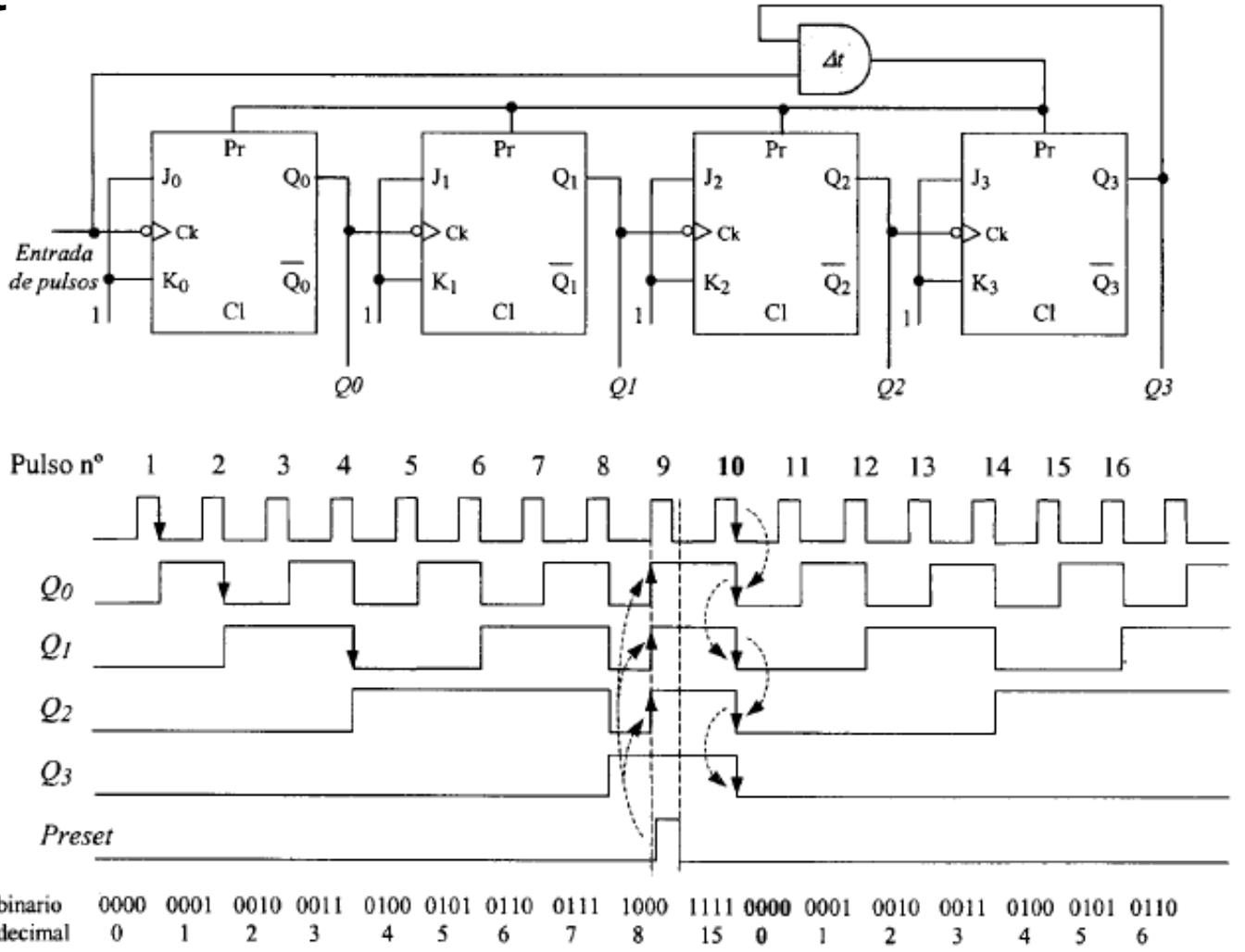


Figura 9.23. Circuito y cronograma de un divisor por 10 del número de pulsos de entrada, usando un contador asíncrono y controlando el final del ciclo a través del preset .

Clear

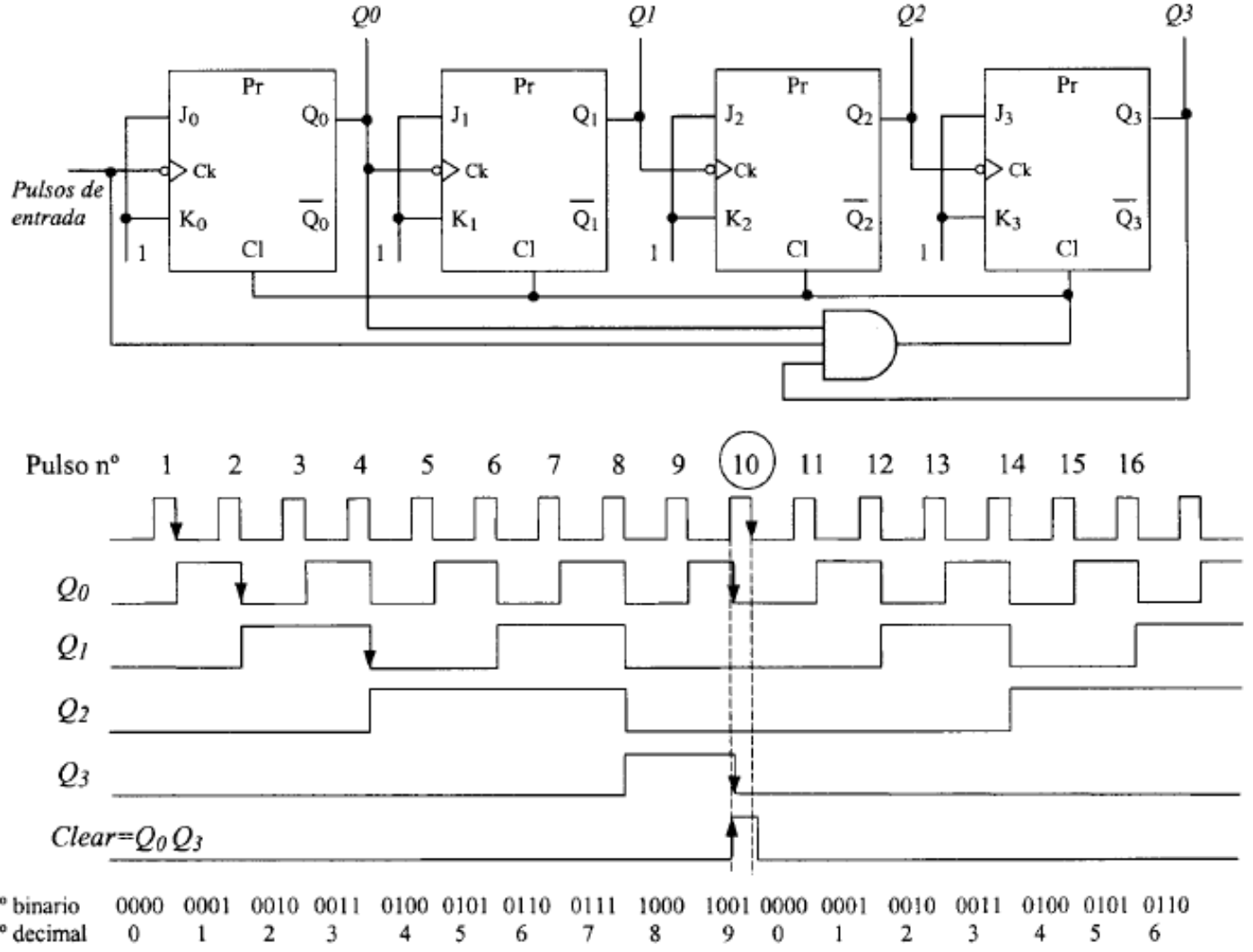


Figura 9.24. Circuito y cronograma de un divisor por 10 controlado mediante el clear.

6.5.2. Contadores Síncronos

Inconvenientes de los contadores asíncronos

- La frecuencia máxima de trabajo depende de la suma de los retardos que introducen los biestables que lo componen.
- Los estados estables no se alcanzan siempre al mismo tiempo

- Estos inconvenientes se solucionan utilizando ***contadores síncronos,*** con las siguientes características:
  - Los relojes de todas las básculas están unidos entre sí y a la señal del reloj de entrada, de forma que la transición de ellas se produce en función de los valores que se introduzcan en sus entradas de datos.
  - Todas las básculas comenzarán simultáneamente el proceso de cambio (si es que se ha de producir según los valores de sus entradas
  - Se pueden implementar con básculas JK con las dos entradas unidas a “1” (básculas T)

Q_n	Q_{n+1}	J (set)	K (reset)
0	0	0	*
0	1	1	*
1	0	*	1
1	1	*	0

$J = \overline{Q_n}\, Q_{n+1}$

$K = Q_n\, \overline{Q_{n+1}}$

Funciones

$J_0=K_0=1$

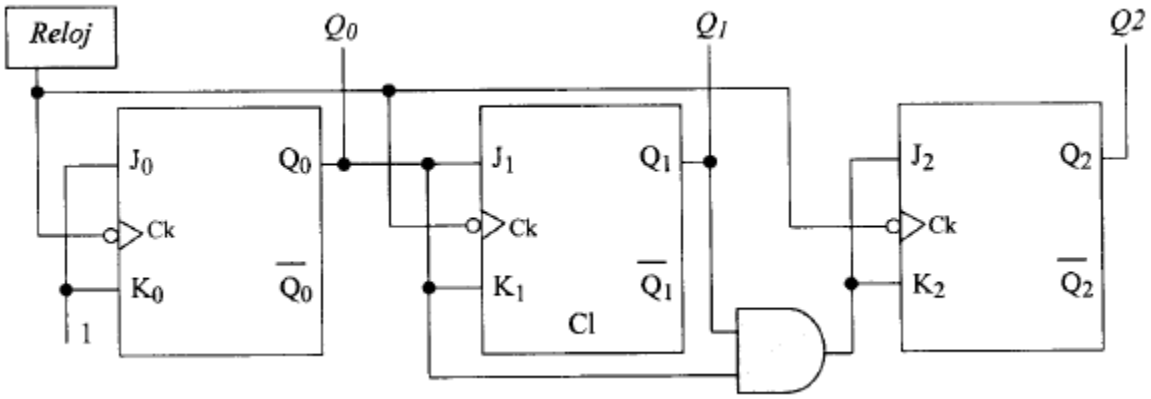
$J1=K1=Q_0$

$J2=K2=Q_0Q_1$

	Q_2^n	Q_1^n	Q_0^n	Q_2^{n+1}	Q_1^{n+1}	Q_0^{n+1}	J_2	K_2	J_1	K_1	J_0	K_0
0	0	0	0	0	0	1	0	*	0	*	1	*
1	0	0	1	0	1	0	0	*	1	*	*	1
2	0	1	0	0	1	1	0	*	*	0	1	*
3	0	1	1	1	0	0	1	*	*	1	*	1
4	1	0	0	1	0	1	*	0	0	*	1	*
5	1	0	1	1	1	0	*	0	1	*	*	1
6	1	1	0	1	1	1	*	0	*	0	1	*
7	1	1	1	0	0	0	*	1	*	1	*	1

Figura 9.25. Transiciones y señales de control necesarias para producirlas en un contador síncrono de 8 estados diseñado con 3 biestables J-K.

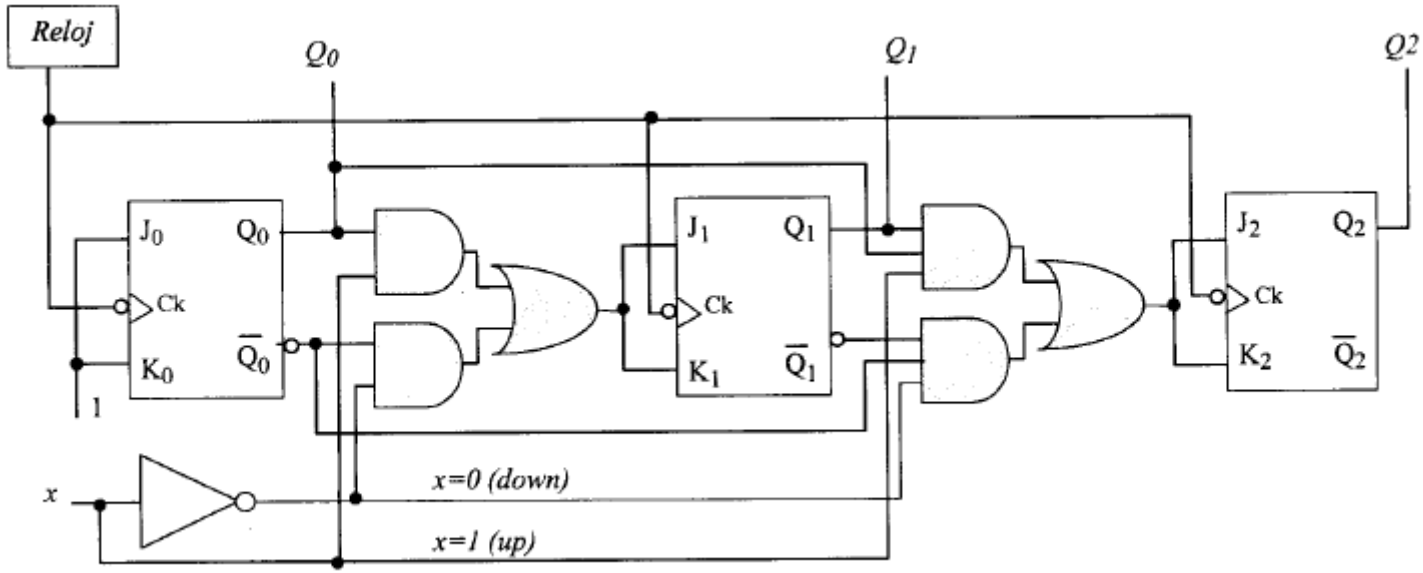
Contador síncrono de acarreo paralelo



$J_0 = K_0 = 1$ $J_1 = K_1 = Q_0$ $J_2 = K_2 = Q_1 Q_0$

Contador Reversible

- En el caso de un contador ascendente:
  - Mediante una puerta AND seleccionamos como las entradas de JK de cada báscula, las salidas *Q* de las básculas de pesos inferior.
- En el caso de un contador descendente:
  - Mediante una puerta AND seleccionamos como las entradas de JK de cada báscula, las salidas *Q´ (negada)* de las básculas de pesos inferior.



$$J_0 = K_0 = 1$$

$$J_1 = K_1 = Q_0 \cdot x + \overline{Q}_0 \overline{x}$$

$$J_2 = K_2 = Q_1 \cdot Q_0 \cdot x + \overline{Q}_1 \cdot \overline{Q}_0 \overline{x}$$

6.5.3. Aplicación del método general a la Síntesis de Contadores con PLDs

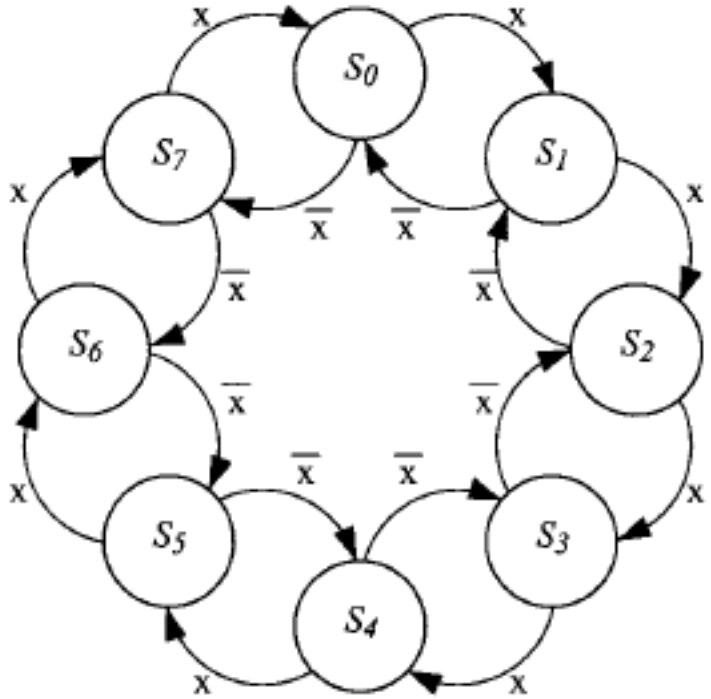


Figura 9.27. Diagrama de transición de estados de un contador reversible de tres bits.

Matriz de transición de estado

$T^0(x=0)$		S_0	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7
		000	001	010	011	100	101	110	111
S_0	000	0	0	0	0	0	0	0	1
S_1	001	1	0	0	0	0	0	0	0
S_2	010	0	1	0	0	0	0	0	0
S_3	011	0	0	1	0	0	0	0	0
S_4	100	0	0	0	1	0	0	0	0
S_5	101	0	0	0	0	1	0	0	0
S_6	110	0	0	0	0	0	1	0	0
S_7	111	0	0	0	0	0	0	1	0

$T^1(x=1)$		S_0	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7
		000	001	010	011	100	101	110	111
S_0	000	0	1	0	0	0	0	0	0
S_1	001	0	0	1	0	0	0	0	0
S_2	010	0	0	0	1	0	0	0	0
S_3	011	0	0	0	0	1	0	0	0
S_4	100	0	0	0	0	0	1	0	0
S_5	101	0	0	0	0	0	0	1	0
S_6	110	0	0	0	0	0	0	0	1
S_7	111	1	0	0	0	0	0	0	0

Figura 9.28. Matrices de transición de estados para los dos valores de la entrada (x = 0, x = 1) en un contador reversible.

Matriz Funcional

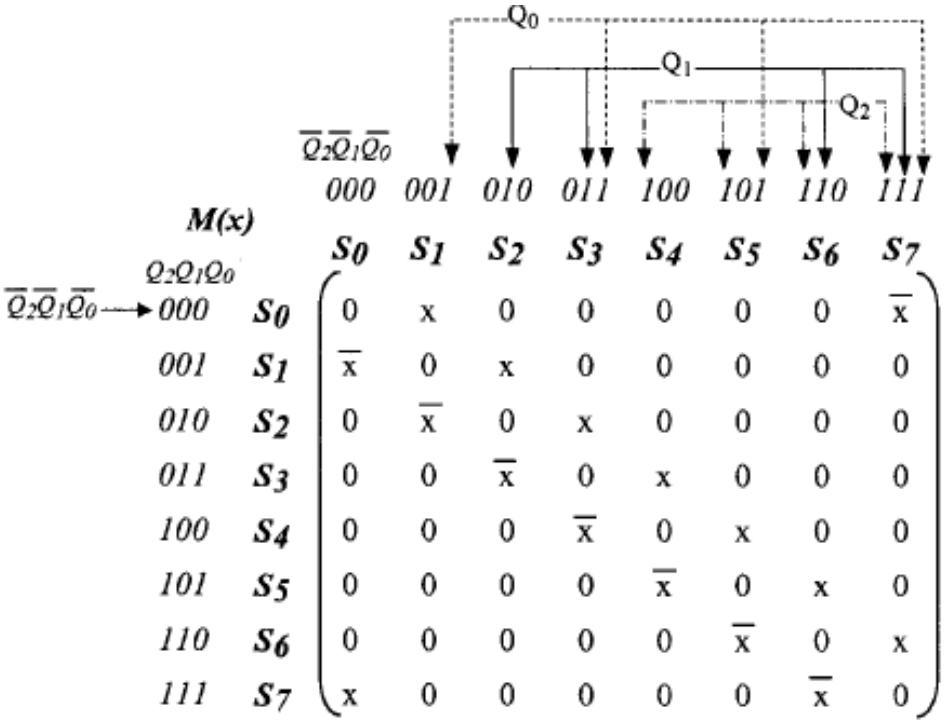
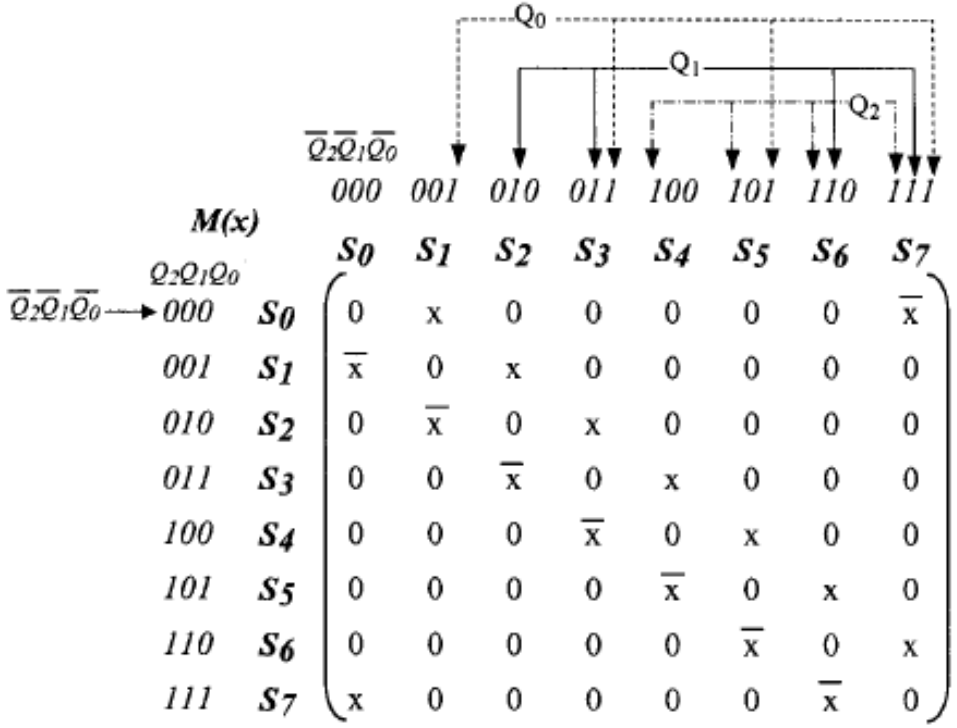


Figura 9. 29. Matriz funcional correspondiente al contador de la *figura 9.27*. Recordemos que se obtiene multiplicando cada valor de la configuración de entrada $(\overline{x}, x)$ por la matriz de transición correspondiente y sumando ambos productos ya que las configuraciones de entrada son mutuamente exclusivas. Por facilitar el análisis se ha repetido al comienzo de fila y columna la codificación del estado. También se incluyen las flechas que agrupan el conjunto de estados *finales* en los que un determinado biestable está en alta.



$$D_0(t) = \overline{Q}_2\overline{Q}_1\overline{Q}_0\left(x+\overline{x}\right)+\overline{Q}_2Q_1\overline{Q}_0\left(x+\overline{x}\right)+Q_2\overline{Q}_1\overline{Q}_0\left(x+\overline{x}\right)+Q_2Q_1\overline{Q}_0\left(\overline{x}+x\right) \qquad [9.56]$$

$$D_1(t) = \overline{Q}_2\overline{Q}_1\overline{Q}_0\,\overline{x}+\overline{Q}_2\overline{Q}_1Q_0x+\overline{Q}_2Q_1\overline{Q}_0x+\overline{Q}_2Q_1Q_0\,\overline{x}+$$
$$+Q_2\overline{Q}_1\overline{Q}_0\,\overline{x}+Q_2\overline{Q}_1Q_0x+Q_2Q_1\overline{Q}_0x+Q_2Q_1Q_0\,\overline{x} \qquad [9.55]$$

$$D_2(t) = \overline{Q}_2(t-\Delta t)\,\overline{Q}_1(t-\Delta t)\cdot\overline{Q}_0(t-\Delta t)\,\overline{x}(t-\Delta t)+\overline{Q}_2Q_1Q_0x+$$
$$+Q_2\overline{Q}_1\overline{Q}_0x+Q_2\overline{Q}_1Q_0\left(\overline{x}+x\right)+Q_2Q_1\overline{Q}_0\left(x+\overline{x}\right)+Q_2Q_1Q_0\,\overline{x} \qquad [9.54]$$

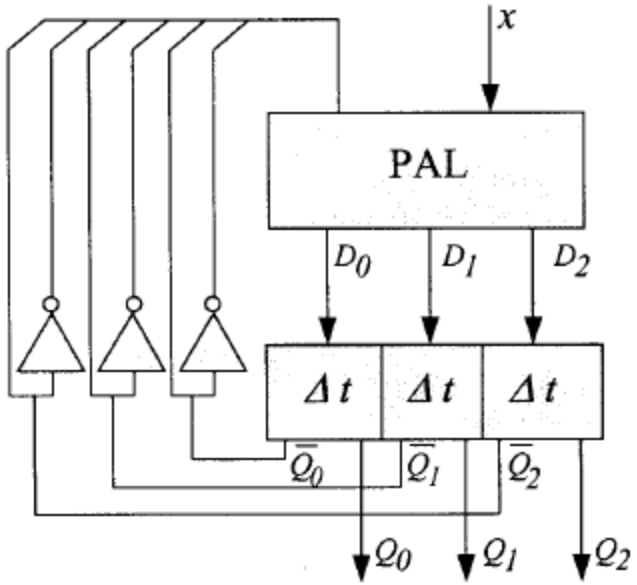
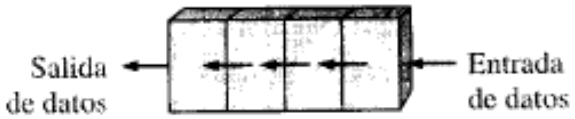


Figura 9.30. Contador reversible de ocho estados sintetizado mediante una PAL tipo 16R8 que ya incluye los biestables D. Ver tema 7 para precisar los detalles de la programación de los dos multiplexos de las macroceldas de salida.

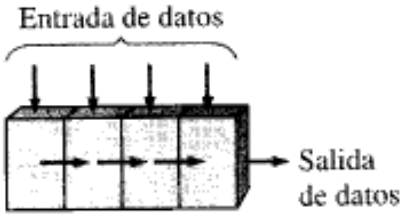
6.6. Registros de Desplazamiento

- Un registro de desplazamiento es circuito digital con dos funciones básicas:
  - Almacenamiento de datos
  - Movimiento de datos
- Con tales funciones una cuestión elemental es el modo de introducir y el modo de sacar los datos.
- Hay dos maneras de manipular los datos:
  - serie/paralelo;
- En función de la entrada y la salida de dichos datos tenemos:
  - Entrada serie / Salida serie (S-S).
  - Entrada serie / Salida paralelo (S-P).
  - Entrada paralelo / Salida serie (P-S).
  - Entrada paralelo / Salida paralelo (P-P).

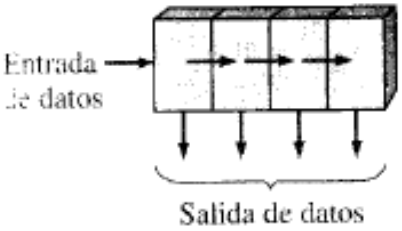
(a) Entrada serie/salida serie con desplazamiento a la derecha



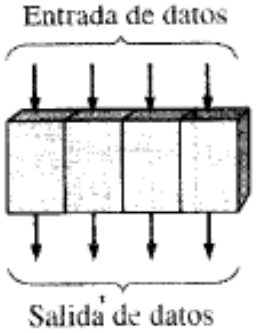
(b) Entrada/salida serie con desplazamiento a la izquierda



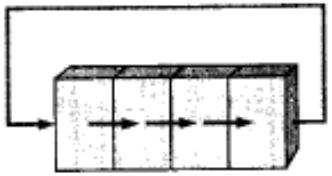
(c) Entrada paralelo/salida serie



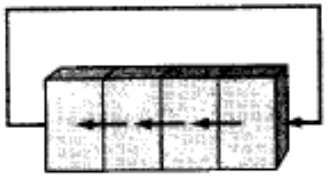
(d) Entrada serie/salida paralelo



(e) Entrada paralelo/



(f) Rotación a la derecha



(g) Rotación a la izquierda

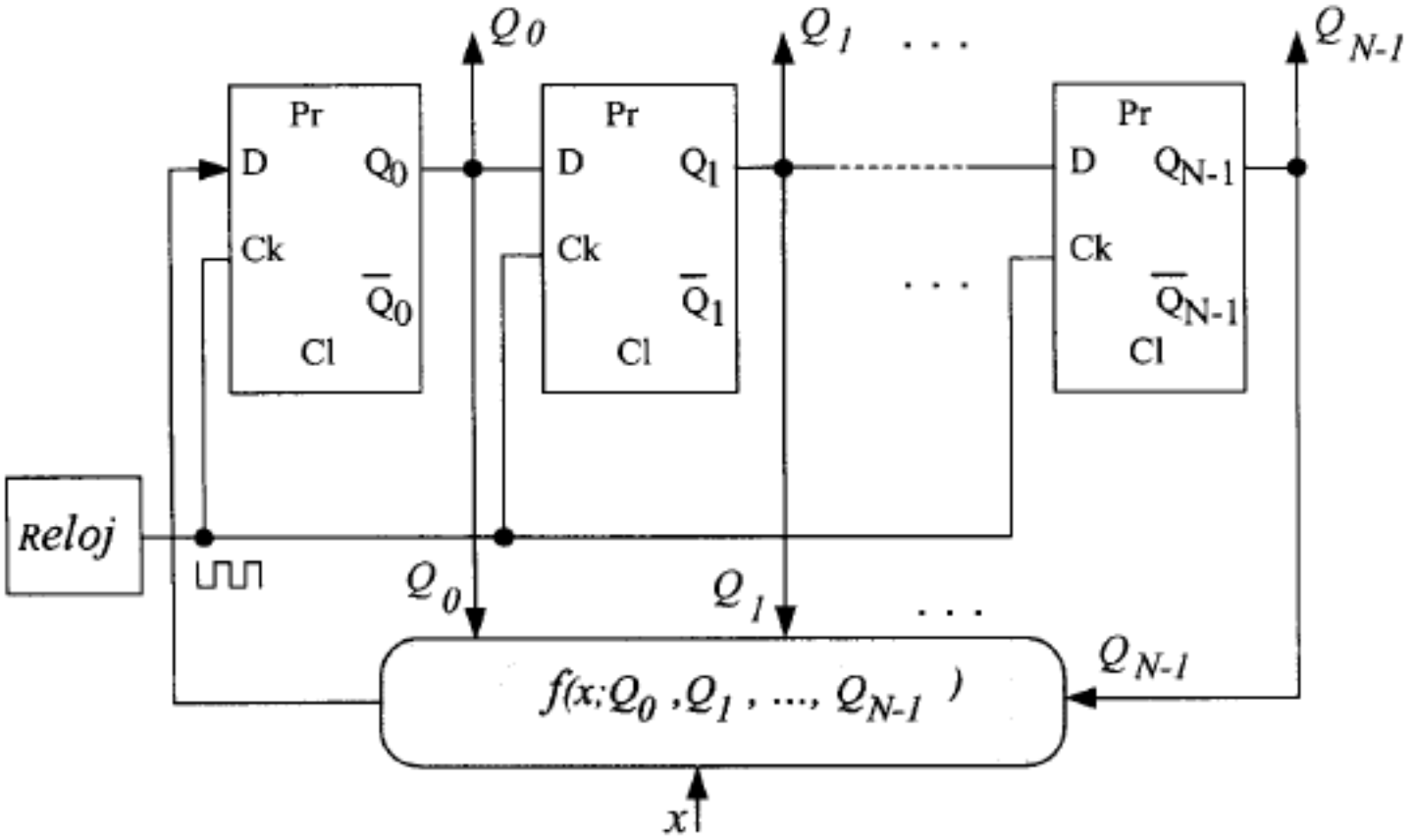
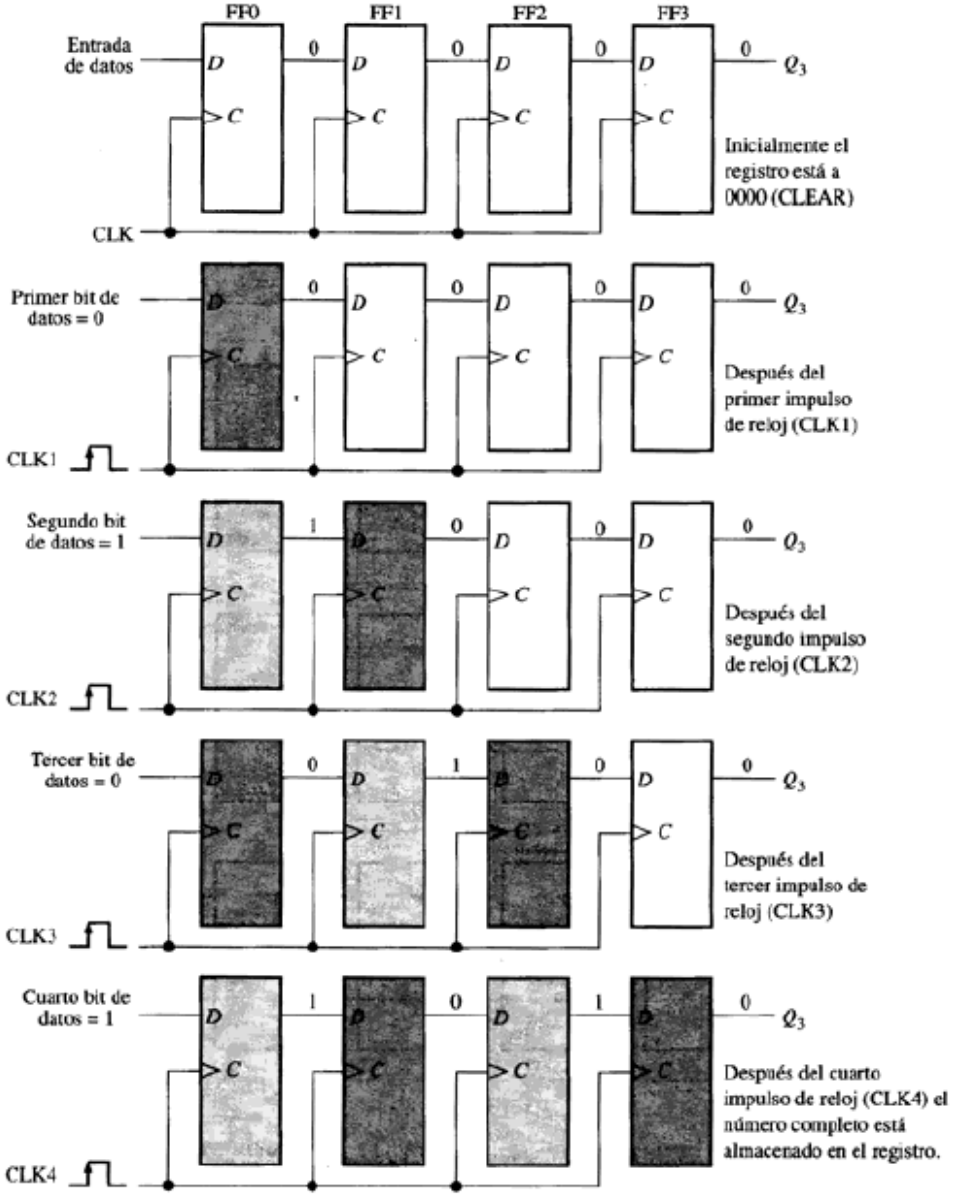


Figura 9.33. Estructura general de los registros de desplazamiento.

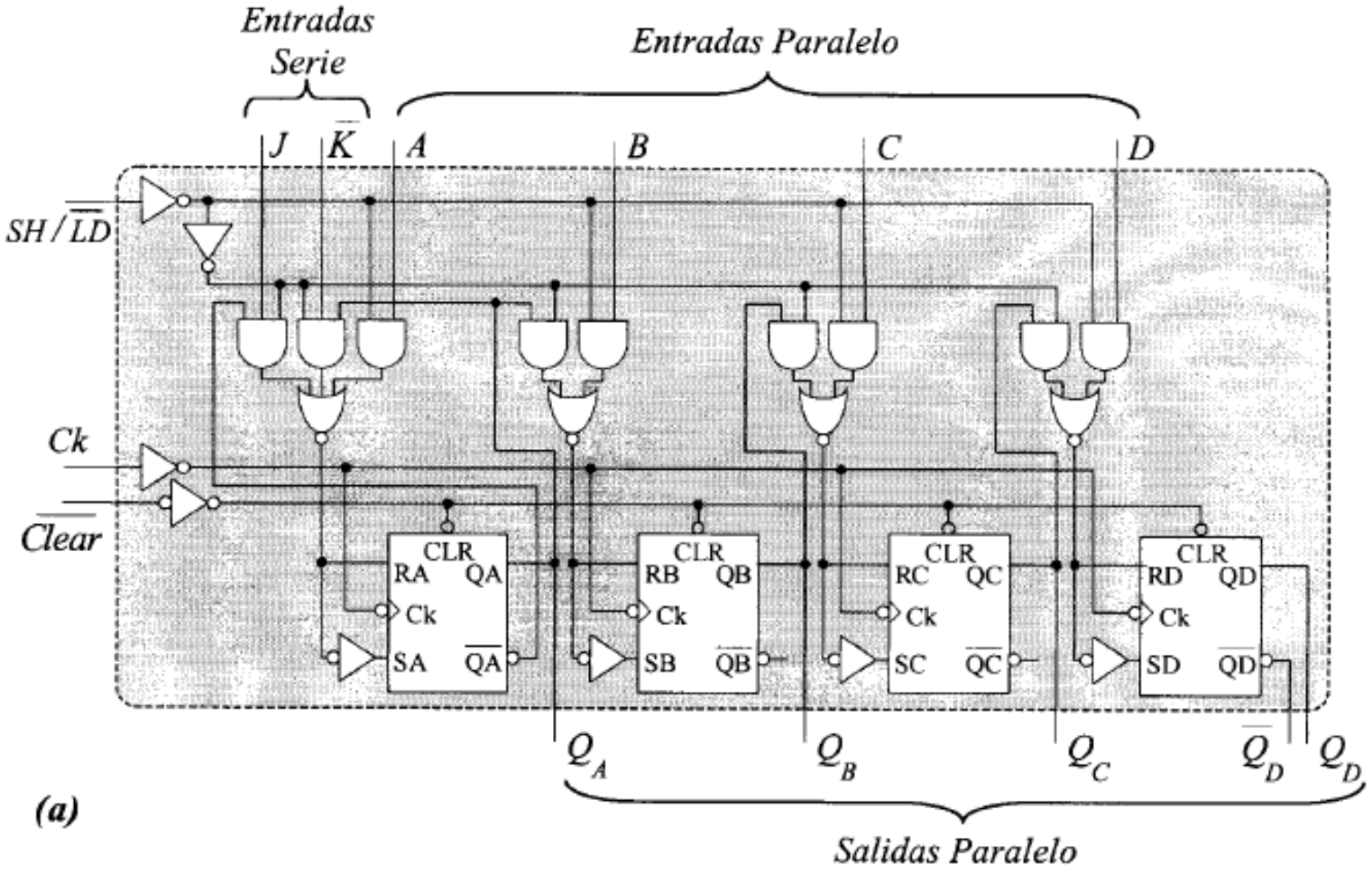
La implementación de los registros parte de dos premisas elementales

- 1) Estarán compuestos por tantas básculas D como bits queramos almacenar o manipular.
- 2) Según el modo de carga o desplazamiento:
  - a) En el caso de una entrada paralelo, cada bit de entrada que queramos introducir se deberá conectar a cada una de las entradas de cada báscula del registro.
  - b) En el caso de una entrada serie o un desplazamiento, cada entrada de cada báscula deberá ir conectada a la salida de la báscula inmediatamente inferior y de la cual deberá recoger el bit que se quiere desplazar.

Funcionamiento de un registro de desplazamiento



Registro de desplazamiento universal de cuatro bits SN74AS195



(b)

Entradas									Salidas				
$\overline{Clear}$	$SH/\overline{LD}$	Ck	*Serie*		*Paralelo*								
			J	$\overline{K}$	A	B	C	D	Q_A	Q_B	Q_C	Q_D	$\overline{Q}_D$
L	x	x	x	x	x	x	x	x	L	L	L	L	H
H	L	↑	x	x	a	b	c	d	*a*	*b*	*c*	*d*	*d*
H	H	L	x	x	x	x	x	x	Q_{A0}	Q_{B0}	Q_{C0}	Q_{D0}	$\overline{Q}_{D0}$
H	H	↑	L	H	x	x	x	x	Q_{A0}	Q_{A0}	Q_{Bn}	Q_{Cn}	$\overline{Q}_{Cn}$
H	H	↑	L	L	x	x	x	x	*L*	Q_{An}	Q_{Bn}	Q_{Cn}	$\overline{Q}_{Cn}$
H	H	↑	H	H	x	x	x	x	*H*	Q_{An}	Q_{Bn}	Q_{Cn}	$\overline{Q}_{Cn}$
H	H	↑	H	L	x	x	x	x	$\overline{Q}_{An}$	Q_{An}	Q_{Bn}	Q_{Cn}	$\overline{Q}_{Cn}$

Figura 9.34. Registro de desplazamiento 74195. ***(a)*** Circuito interno. ***(b)*** Tabla de control de función.

2. Diseño de un Contador de 3 bits.

2.1. Explique brevemente la diferencia entre un contador síncrono y asíncrono. Elija un tipo de contador (síncrono o asíncrono) para el diseño y explique el motivo de su elección.

2.2. Diseñe el contador con puertas y biestables J-K tipo SN7473 como el que se muestra en la figura adjunta (cuando la señal “clear” pasa a “0” el biestable J-K se pone a cero y cuando pasa a “1” el biestable actúa como tal).

2.3. Dibuje el circuito y el cronograma resultante de dicho contador.

Glosario Tema 6

- **Sistema secuencial síncronos:** Sistema guiado por los pulsos de un reloj en el que todos los cambios ocurren en los flancos de los pulsos de reloj.
- **Sistema secuencial asíncronos:** Sistema guiado por cambios de nivel en las variables, sin que tengan que coincidir con los pulsos del reloj.
- **Representación:** Dado un problema, obtenemos la descripción del circuito que necesitaríamos para su solución en términos del número de configuraciones de entrada necesarias, del número de estados necesarios, y de las transiciones entre estos estados para cada uno de los valores mutuamente exclusivos de las configuraciones de entrada.
- **Matrices de transición de estados**: Conjunto de matrices que constituyen la representación formal del autómata. Sus elementos toman el valor 1 cuando ante una configuración de entrada hay una transición de un estado inicial a otro estado final, en caso contrario, tomarán el valor cero. Sólo tienen un uno por fila ya que desde un estado inicial sólo puede pasar a un estado final, no puede pasa a dos estados finales diferentes.
- **Matriz funcional:** Matriz resultante de multiplicar cada matriz de transición, por la configuración de entrada que la produce, y sumar estos productos. Es una forma compacta de representar el conjunto de expresiones lógicas que controlan todas y cada una de las transiciones de estado para todas y cada una de las posibles configuraciones de entrada
- **Funciones de excitación:** Expresiones lógicas de las señales de entrada de los biestables D y obtenidas a partir de la matriz funcional como suma de los productos de las configuraciones de entrada por los correspondientes estados iniciales que hacen que la correspondiente variable de estado esté en alta.
- **Contadores:** Circuitos secuenciales capaces de recorrer una secuencia previamente especificada de estados. En general reciben como entrada un tren de impulsos y responden con una sucesión de estados correspondientes a la representación en binario del número de impulsos recibidos desde que se inició el ciclo.

Glosario Tema 6

- **Contador up/down:** Contador que dependiendo del valor de una variable de control cuenta “hacia arriba” o “hacia abajo”,
- **Contador asíncrono binario:** cuando le dejamos terminar su ciclo máximo.
- **Divisor por Q:** Contador en el que se corta el ciclo de incrementar el contenido del contador en ese valor Q devolviendo desde aquí al contador a su estado inicial (00…0), siendo Q menor que el numero total de estados.
- **Contadores asíncronos:** Contador que usa la entrada de reloj como entrada general al contador, es decir como variable lógica cuyo número de impulsos se desea contar.
- **Contadores síncronos:** Contador en el que la señal de reloj entra a todos los biestables y los cambios de estado de los biestables se producen en todos a la vez coincidiendo con los flancos de subida o bajada de los pulsos de reloj.
- **Contador reversible síncromo de 8 estados:** es un circuito secuencial en el que existe una entrada de control tal que cuando esta entrada está en alta, el contador incrementa su contenido con cada pulso del reloj e inversamente, cuando la entrada de control está en baja cada pulso de reloj decrementa en una unidad el contenido del contador.
- *Registros de desplazamiento:* ***circuito secuencial que consta de N biestables D conectados en cascada en los que la información entra por el primer biestable y, ante los sucesivos pulsos de reloj, la información es transferida de cada biestable al siguientes.***

Enlaces

- Componentes electrónicos
  - http://www.onsemi.com/PowerSolutions/home.do?lctn=header
- Morillo
  - http://www.uned.es/ca-bergara/ppropias/web_fund_sistemas_digitales/main.html